

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Método de Diferenças Finitas ADI Combinado à Projeção de Pressão para a Simulação das Equações de Navier-Stokes

Raphael Nogueira Rezende Laroca Pinto

JUIZ DE FORA
MARÇO, 2025

Método de Diferenças Finitas ADI Combinado à Projeção de Pressão para a Simulação das Equações de Navier-Stokes

RAPHAEL NOGUEIRA REZENDE LAROCA PINTO

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação
Orientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

JUIZ DE FORA
MARÇO, 2025

MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS ADI COMBINADO À PROJEÇÃO DE PRESSÃO PARA A SIMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Raphael Nogueira Rezende Laroca Pinto

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS
EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTE-
GRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Iury Higor Aguiar da Igreja
Doutor em Modelagem Computacional

Marcelo Bernardes Vieira
Doutor em Ciência da Computação

José Jerônimo Camata
Doutor em Engenharia Civil

JUIZ DE FORA
20 DE MARÇO, 2025

Ao meu irmão pela motivação de ser um bom exemplo.

Aos meus pais, pelo apoio e o sustento.

Aos meus avós, pelas histórias e passado.

Ao meu gato por me fazer companhia.

Resumo

As equações de Navier-Stokes representam um desafio matemático e numérico devido à sua natureza não linear e predominantemente convectiva, além das restrições de estabilidade numérica associada a aproximação simultânea dos campos de velocidade e pressão. Este trabalho estuda uma abordagem numérica que utiliza um método implícito de direções alternadas (ADI) combinado com um esquema de Projeção de Pressão para a resolução das equações de Navier-Stokes, com o intuito de solucionar problemas de dinâmica dos fluidos em um espaço bidimensional. Esta metodologia resolve o campo de velocidade e de pressão em etapas distintas, garantindo a conservação da massa e a condição de incompressibilidade. Podemos descrever o processo como: (i) a resolução do campo de velocidades calculado pelo método ADI nos centros das arestas da grade, (ii) determinação da pressão nos centros das células da grade com a utilização do campo de velocidade e (iii) correção do campo de velocidade a partir da aproximação obtida para o campo de pressão, garantindo a conservação de massa e incompressibilidade do sistema. Para a validação do método realizamos estudos de convergência com a adoção de soluções analíticas para o caso transiente e estacionário e comparamos dados da literatura do desempenho entre versões sequenciais e paralelas para o problema da cavidade (*lid-driven cavity*) e o problema do degrau (*backward-facing step*). O método foi implementado em linguagem de programação Python 3 com a utilização de bibliotecas específicas para cálculo numérico e análise de dados.

Palavras-chave: Dinâmica de Fluidos, Equações Diferenciais, Métodos Numéricos, Navier-Stokes, Diferenças Finitas, ADI, Projeção da Pressão.

Abstract

The Navier-Stokes equations represent a mathematical and numerical challenge due to their nonlinear and predominantly convective nature, in addition to the numerical stability constraints associated with the simultaneous approximation of the velocity and pressure fields. This work studies a numerical approach that uses an implicit alternating directions (ADI) method combined with a Pressure Projection scheme to solve the Navier-Stokes equations, with the aim of solving fluid dynamics problems in a two-dimensional space. This methodology solves the velocity and pressure fields in distinct steps, ensuring mass conservation and the incompressibility condition. We propose the following steps for this study: (i) resolution of the velocity field calculated by the ADI method at the centers of the grid edges, (ii) determination of the pressure at the centers of the grid cells using the velocity field and (iii) correction of the velocity field from the approximation obtained for the pressure field, ensuring mass conservation and incompressibility of the system. To validate the method, we performed convergence studies with the adoption of analytical solutions for the transient and stationary cases and compared literature data on the performance between sequential and parallel versions for the lid-driven cavity and the backward-facing step problem. The method was implemented in the Python 3 programming language using specific libraries for numerical calculation and data analysis.

Keywords: Fluid Dynamics, Differential Equations, Numerical Methods, Navier-Stokes, Finite Differences, ADI, Pressure Projection.

Agradecimentos

Agradeço aos meus Pais por terem me dado o carinho e a condição de ter perseguido essa formação sem precisar me preocupar com qualquer coisa.

Agradeço ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Juiz de Fora, por me dar os meios, infraestrutura e o conhecimento para que essa monografia fosse realizada.

Agradeço ao Professor Dr. Iury, por ser meu Orientador e ter dado o todo o apoio necessário para que esse trabalho se realizasse, além de ter me introduzido e despertado o meu interesse em métodos numéricos.

Agradeço ao Professor Dr. Marcelo Bernardes e o Professor Dr. Marcelo Caniato, por ter me introduzido ao campo de Dinâmica de Fluidos e Computação Gráfica.

“O homem é o homem e a sua circunstância”.

José Ortega y Gasset

Conteúdo

Lista de Figuras	7
1 Introdução	8
2 Equações Governantes	13
3 Metodologia Numérica	20
3.1 Discretização Numérica	20
3.2 Método Implícito de Direções Alternadas (ADI)	25
3.2.1 Método Peaceman-Rachford	25
3.2.2 Formulação na Grade Escalonada	28
3.3 Projeção de Pressão	30
3.4 Estratégia de Resolução	33
4 Resultados	37
4.1 Estudo de Convergência: Caso Transiente	37
4.2 Estudo de Convergência: Caso Estacionário	42
4.3 Problema da Cavidade (<i>lid-driven cavity flow</i>)	45
4.4 Problema do Escoamento Sobre Degrau	49
5 Conclusões e Trabalhos Futuros	57
Bibliografia	59

Lista de Figuras

2.1	Volume Ω de fluido	15
3.1	Discretização Co-allocada com $N = 4$	21
3.2	Distribuição dos nós em uma grade MAC com 9 células.	22
3.3	Discretização Temporal	25
4.1	Magnitude de \mathbf{u} em $t=0.0$	38
4.2	Magnitude de \mathbf{u} em $t=5.0$	38
4.3	Magnitude de \mathbf{u} em $t=10.0$	38
4.4	Convergência da velocidade utilizando $\Delta t = \Delta h$ e $\Delta t = \Delta h^2$ para diferentes números de Reynolds.	39
4.5	Estudo de Convergência da Pressão para $R_e = 1000$	40
4.6	Conservação de massa antes e depois da Projeção.	41
4.7	Solução exata do Campo de Velocidade de Kovasznay.	43
4.8	Estudo de convergência para $R_e = 40.0$	44
4.9	Modelo do Problema da Cavidade.	46
4.10	Problema da Cavidade em diferentes iterações.	47
4.11	Perfil da componente u em $x = 0.5$ para diferentes N com $R_e = 100$	48
4.12	Perfil da componente u para diferentes N com $R_e = 1000$	48
4.13	Valores do Divergente Total antes (à esquerda) e depois (à direita) da aplicação da Projeção da Pressão.	49
4.14	Esquema do Problema do Degrau.	50
4.15	Campo da velocidade e linhas de corrente para $R_e = 100$	52
4.16	Perfil da velocidade para $R_e = 100$	52
4.17	Caso estável para $R_e = 389$	53
4.18	Perfil da velocidade para $R_e = 389$	53
4.19	Campo de Pressão do caso estacionário para $R_e = 100$	54
4.20	Comparação de x_L obtido numericamente com dados experimentais Armaly et al. (1983) (esquerda) resultados apresentados por Labeur e Wells (2012) (direita).	54
4.21	Tempo médio de resolução para diferentes refinamentos empregando $R_e = 100$	55

1 Introdução

O campo de dinâmica de fluidos é extenso e compreende diversas áreas, como engenharia, computação, matemática e física, com diversas aplicações distribuídas entre essas disciplinas. Apesar dos avanços recentes no uso de técnicas de IA para a simulação de problemas nessas áreas (SANCHEZ-GONZALEZ et al., 2020), o estudo da mecânica dos fluidos se dá em grande maioria através da simulação das equações de Navier-Stokes empregando métodos numéricos. Tais métodos numéricos abrangem diversas técnicas para se obter uma aproximação para os problemas propostos. Uma delas é a abordagem euleriana. Nessa abordagem, o fluido é visto como um contínuo, e suas características, como velocidade, densidade, temperatura e etc. são analisadas em pontos escolhidos do espaço discretizado. Essa abordagem teve espaço na área científica e em aplicações de Computação Gráfica por sua naturalidade ao utilizar soluções em malhas para tratar das equações, resultando em métodos aproximados extremamente eficientes e de simples implementação (STAM, 2003). Existem outros pontos de vista acerca das abordagens de discretização dos fluidos. Os Métodos que utilizam partículas, como o SPH (*Smoothed-Particle Hydrodynamics*), têm sido amplamente utilizados devido a sua flexibilidade e simplicidade de implementação em sistemas físicos já existentes (YE et al., 2019). Esta metodologia emprega uma estratégia de resolução utilizando o ponto de vista Lagrangiano, onde o próprio fluido é discretizado e o espaço é contínuo. Métodos como estes são baseados em partículas. Há uma terceira classe denominada Semi-Lagrangianos. Nessa classe, as equações muitas vezes são resolvidas com visões eulerianas, e com um passo de interpolação se obtém partículas discretas de fluidos, como em métodos lagrangianos (LUCY, 1977). Tal abordagem é desejável para certas aplicações onde o uso de partículas discretas se faz necessário, mas a escolha de método numérico favorece uma visão euleriana (HARLOW, 1964).

As soluções numéricas são comumente obtidas utilizando métodos de diferenças finitas (MDF), métodos de volumes finitos (MVF) e/ou métodos de elementos finitos (MEF), cada um com suas vantagens e desvantagens conforme o problema que está sendo

tratado. Nos últimos anos, os métodos de elementos finitos ganharam grande espaço no mundo científico em decorrência de sua flexibilidade e adaptabilidade para diversos tipos de problemas (JOHN et al., 2016). MEF é uma abordagem numérica de aproximação de equações diferenciais onde as equações são integradas e o erro é visto como uma função a ser minimizada em um espaço de aproximação definido em um domínio que pode ser discretizada de forma flexível utilizando elementos de variados tamanhos e formas (RINCON; ISHIIH, 2013). Por outro lado, os métodos de diferenças finitas, mesmo que antigos, ainda se mostram robustos e de mais simples implementação. Nessa abordagem, o espaço e o tempo são divididos em pedaços finitos e as derivadas das funções são aproximadas utilizando pontos de uma grade, com o amparo da série de Taylor para a prova da convergência e consistência matemática (LEVEQUE, 2007). Há também, os métodos de volumes finitos. Nessa metodologia, as equações são discretizadas em volumes finitos e integradas sobre cada um deles, seguindo estritamente os princípios de conservações de massa e energia através do uso de fluxos entre os volumes (MOUKALLED et al., 2016).

Este trabalho visa estudar um método que pertence ao campo de diferenças finitas. Nas diferenças finitas, derivadas são aproximadas utilizando simples operações aritméticas. Existem diversas aproximações de derivadas, tanto para derivadas de primeira, segunda ou mais altas ordens. O campo de diferenças finitas consiste em aproximar equações diferenciais, bem como, estudar acerca de sua estabilidade, erro, e convergência da solução aproximada. Esse estudo pode ser feito de diversas maneiras. Uma delas é a análise do erro máximo de truncamento utilizando Séries de Taylor (LEVEQUE, 2007). Nesse contexto destaca-se o método ADI (*Alternating Direction Implicit*), proposto por Peaceman e Rachford Jr (1955), o qual é um esquema implícito que utiliza uma discretização de direções alternadas, realizando aproximações que resultam em uma solução com convergência de segunda ordem no espaço e no tempo. Os métodos implícitos são caracterizados por discretizações dos termos das equações diferenciais no instante de tempo futuro, exigindo a solução de um sistema de equações para determinar os valores em todos os pontos da grade. Em contraste, nos métodos explícitos para a resolução de equações diferenciais, a aproximação espacial é realizada considerando os termos da discretização avaliados no instante de tempo atual, resultando em uma formulação onde o valor futuro

depende somente de informações conhecidas. Apesar dos métodos explícitos apresentarem um menor custo computacional de resolução por não exigirem a solução de sistemas lineares, esta metodologia requer condições de estabilidade mais restritivas, o que pode limitar sua aplicabilidade em problemas com grandes variações temporais ou espaciais (LEVEQUE, 2007).

Por outro lado, a estrutura e a complexidade do sistema de equações resultante são fatores cruciais para o desempenho e a precisão da discretização implícita. O esquema ADI foi originalmente proposto por Peaceman e Rachford Jr (1955) para a resolução de problemas de transporte em duas dimensões e posteriormente estendido para casos tridimensionais por Douglas (1962). Sua principal vantagem é a capacidade de resolver problemas multidimensionais por meio da decomposição em problemas unidimensionais, resolvidos em passos de tempo intermediários. Esse processo resulta em uma sequência de sistemas lineares tri-diagonais, possibilitando uma redução significativa do custo computacional ao empregar o algoritmo de Thomas (THOMAS, 1949). Esse método permite uma solução direta com complexidade computacional linear, ao contrário de algoritmos diretos como a eliminação de Gauss e a decomposição LU, que apresentam complexidade cúbica, tornando-se inviáveis para problemas de grande escala.

Em geral, o método ADI é comumente empregado para aproximar as equações de Navier-Stokes em termos das variáveis Vorticidade e Função Corrente (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005; ERTURK, 2008; ERTURK, 2009). Nessa formulação, as equações de Navier-Stokes, usualmente expressas em termos das variáveis primitivas de velocidade e pressão, são reescritas utilizando as variáveis escalares vorticidade e função corrente. Essa transformação é realizada ao se tomar o rotacional das equações de momento e conservação de massa, reduzindo o problema bidimensional de três variáveis para apenas duas. Essa mudança de variáveis também busca evitar a solução simultânea de velocidade e pressão, que exige restrições específicas para garantir a estabilidade do problema, especialmente no que diz respeito à imposição da conservação de massa no caso incompressível (ROYCHOWDHURY, 2020). Contudo, embora essa abordagem seja amplamente utilizada para problemas em 2D, ela não é viável para problemas tridimensionais, pois uma única função corrente escalar não existe no espaço tridimensional (ROYCHOWDHURY,

2020). Para problemas em 3D, é necessário utilizar diretamente as variáveis primitivas. Nesse contexto, esforços foram realizados para possibilitar a simulação de problemas bidimensionais e tridimensionais com uma abordagem baseada em variáveis primitivas, sem gerar oscilações não físicas na distribuição de pressão (HARLOW; WELCH et al., 1965; FERZIGER; PERIĆ, 2002). Uma solução proposta foi o uso de grades diferenciadas para as variáveis primitivas. O método MAC (Marker And Cell), introduzido por Harlow, Welch et al. (1965), utiliza uma grade deslocada (*staggered grid*), onde a pressão é armazenada nos centros das células e as velocidades são armazenadas nas faces das células (ver Figura 3.2). A discretização desempenha um papel fundamental na imposição da condição de incompressibilidade em escoamentos fluidodinâmicos. Para garantir que o método preserve a conservação de massa e satisfaça essa restrição física essencial, adotamos o método de Projeção da Pressão, proposto por Chorin (1967). Esse esquema reformula a solução das equações de Navier-Stokes ao resolver separadamente o campo de velocidade e a imposição da incompressibilidade, permitindo uma abordagem mais eficiente e estável para a resolução numérica do problema. A essência dessa abordagem consiste em corrigir o campo de velocidade intermediário por meio de uma projeção baseada na pressão. Primeiramente, calcula-se um campo de velocidade provisório que pode não satisfazer a equação de continuidade. Em seguida, determina-se a pressão impondo a condição de divergência nula, garantindo que o campo de velocidade corrigido respeite a incompressibilidade a cada passo de tempo.

Neste contexto, usando a abordagem de discretização MAC, o método ADI para aproximar o campo de velocidade e a Projeção de Pressão para obter a pressão e garantir a incompressibilidade, este trabalho propõe a solução das equações de Navier-Stokes utilizando o ponto de vista euleriano. Dessa forma, assumimos em nosso estudo fluidos Newtonianos, que são fluidos cuja viscosidade se mantém constante independente de qualquer característica aplicada sobre ele. Assumimos também que o fluido é incompressível, ou seja, sua densidade, e por consequência seu volume, permanecem constantes em um sistema fechado. Durante nossa modelagem, forças de corpo são ignoradas, tais como efeitos convectivos naturais induzidos por diferenças de temperaturas ou forças gravitacionais.

O método numérico proposto será validado por meio de estudos de convergência,

utilizando soluções analíticas transiente e estacionária, como a solução de Taylor-Green (TAYLOR; GREEN, 1937; ORSZAG, 1974) e o Fluxo de Kovasznay (KOVASZNAV, 1948), que permitem avaliar a precisão e a taxa de convergência do algoritmo. O método será testado na reprodução de resultados já consolidados na literatura, como o problema da Cavidade (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) e o escoamento sobre degrau (ARMALY et al., 1983), com a finalidade de demonstrar a precisão e a capacidade do método de simular escoamentos mais realistas.

Além deste capítulo introdutório, este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, são apresentadas e deduzidas as equações governantes que fundamentam o estudo. No Capítulo 3, conceitos e definições associados a discretização numérica, além dos métodos empregados e da estratégia de resolução do modelo proposto são introduzidos. Os resultados obtidos por meio das simulações realizadas, bem como as conclusões específicas para cada experimento são expostos no Capítulo 4. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e considerações finais sobre a metodologia numérica utilizada e os resultados computacionais obtidos, sendo destacados também algumas possíveis direções para trabalhos futuros.

2 Equações Governantes

No cerne da dinâmica dos fluidos, encontram-se as equações de Navier-Stokes, que regem o movimento dos fluidos, sejam eles líquidos ou gasosos. Essas equações têm sua origem nas leis físicas de conservação de massa e momento. Neste capítulo, apresentamos uma breve dedução dessas equações, seguindo a abordagem proposta por Bridson (2015), a qual parte da Segunda Lei de Newton e desenvolve, intuitivamente, as forças que atuam sobre um corpo fluido. Ressalta-se que, por questões de simplicidade, alguns passos são omitidos, especialmente aqueles que demandam um maior rigor matemático para tratar o volume e a massa do fluido em quantidades infinitesimais, que exigiriam a aplicação de limites e outros procedimentos adicionais.

Inicialmente, para descrever as forças que agem sobre um fluido, definimos o volume de um fluido arbitrário V infinitesimal de massa m . Além disso, utilizamos a definição do operador denominado Derivada Material, que auxiliará na notação. Esse operador é comumente utilizado para descrição de quantidades físicas sobre campos vetoriais em sistemas matemáticos.

$$\frac{D(\mathbf{u})}{D(t)} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (2.1)$$

A derivada material combina um termo de acumulação com um termo de convecção, quando aplicada a um campo de velocidades \mathbf{u} este operador pode ser relacionado a aceleração \mathbf{a} . Assim, substituindo (2.1) na Segunda Lei de Newton $\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}$, obtemos

$$\mathbf{F}_r = m \frac{D(\mathbf{u})}{D(t)}. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) descreve o movimento da massa de um fluido em relação às forças externas \mathbf{F}_r . Entretanto, o movimento dos fluidos pode ser causado por diferentes potenciais, como de pressão, elétrico, térmico, entre outros. Em especial, as forças exercidas pelo campo de pressão, induzem o escoamento das zonas de alta pressão para as zonas de

baixa pressão. Essa mudança de zona de alta para baixa pressão é descrita com o valor negativo do gradiente de um campo de pressão p integrado sobre o volume V do fluido. Como V é infinitesimal, essa integral pode ser calculada como a multiplicação de V pelo gradiente de pressão, como segue

$$m \frac{D(\mathbf{u})}{D(t)} = \mathbf{F}_r - V \nabla p. \quad (2.3)$$

Além disso, temos o efeito viscoso agindo sobre o fluido. Na natureza, líquidos e gases são viscosos, característica que representa a resistência a mudanças na velocidade de escoamento. Em modelos matemáticos, isso é representado utilizando o Laplaciano de uma quantidade, que força com que valores sejam difundidos com seus vizinhos. Inserindo o Laplaciano na equação, junto ao Coeficiente da Viscosidade Dinâmica η , multiplicamos pelo volume a fim de obter uma força.

$$m \frac{D(\mathbf{u})}{D(t)} = \mathbf{F}_r - V \nabla p + V \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

Neste ponto, temos um sistema de equações constituído por cada componente da velocidade que descreve o movimento de um fluido, porém esta depende da massa diretamente. Para contornarmos isso, iremos dividir toda a equação pelo volume V , considerando que $m/V = \rho$ que representa a densidade do fluido, dando origem a seguinte equação

$$\rho \frac{D(\mathbf{u})}{D(t)} = \frac{\mathbf{F}_r}{V} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Dividindo a equação (2.5) pela densidade e tomando $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r/(\rho V)$, de modo a simplificar a notação, obtemos

$$\frac{D(\mathbf{u})}{D(t)} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

O termo η/ρ é a definição de viscosidade cinemática, representada por ν . Por fim, expandindo a Derivada Material e passando os termos associados as variáveis da velocidade

para o lado esquerdo, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (2.7)$$

onde a variável \mathbf{u} denota um campo vetorial de velocidades e p denota um campo escalar de pressão.

Nesse modelo, assumimos que os fluidos são incompressíveis, ou seja, seu volume não varia no tempo. Isso não é verdade para o mundo real e situações como choques sônicos ou ondas sonoras que alteram o volume do fluido (BRIDSON, 2015). Gases, por exemplo, podem ser facilmente comprimidos em bombas e naturalmente sofrem compressão em regimes de velocidade supersônicas. Entretanto, esses cenários são desconsiderados neste trabalho. Assim, tomamos arbitrariamente um volume V do fluido presente em um domínio Ω com contorno $\partial\Omega$. Podemos visualizá-lo na figura 2.1.

Visualizando o volume Ω e sua borda, temos as normais sob eles.

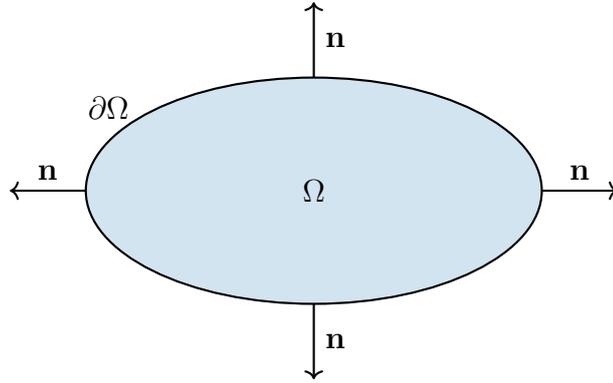


Figura 2.1: Volume Ω de fluido

Devido à incompressibilidade, a variação de V no tempo deve ser zero.

$$\frac{\partial V(\Omega)}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

Agora, utilizaremos a definição do conceito de Fluxo para o próximo passo. O Fluxo ϕ de uma grandeza vetorial física corresponde à quantidade dessa grandeza que atravessa uma determinada superfície, em relação a uma direção normal de referência (HALLIDAY; RESNICK; KRANE, 1996). Matematicamente, para nossa quantia \mathbf{u} , temos isso descrito como.

$$\phi_{\Omega} = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.9)$$

O fluxo de velocidade ϕ pela borda $\partial\Omega$ representa a quantia de volume que escoar para fora ou dentro no domínio, a depender do sinal. Para que a condição de incompressibilidade seja atendida, esse volume não deve variar, implicando que o fluxo sob a borda seja zero. Assim, temos:

$$\frac{\partial V(\Omega)}{\partial t} = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2.10)$$

Com isso, podemos aplicar o Teorema de Gauss (também denominado Teorema da Divergência). Esse teorema relaciona o fluxo de uma quantia sob um contorno de um volume com a divergência dessa sob o volume completo. Formalmente, é descrito (2.11) como

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.11)$$

Aplicando o teorema em nossa relação, obtemos.

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dS = 0. \quad (2.12)$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo de Variações, se a integral de uma função sob um volume arbitrário Ω é igual a zero, então a função deve ser zero (JOST; LI-JOST, 1998). Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.13)$$

Logo, a partir das equações (2.7) e (2.13), derivamos o sistema de equações de Navier-Stokes newtoniano e incompressível, como segue

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (2.14a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.14b)$$

Separando cada termo da equação e analisando-os isoladamente, é possível ob-

servar que a equação do momento (2.7) rege o movimento do fluido, tanto por fenômenos convectivos quanto difusivos, em decorrência das ações de forças externas ao fluido e a suas próprias características como a viscosidade. Ao separar os termos, acabamos com 4 equações, cada uma delas descrevendo um fenômeno físico do fluido. (BRIDSON, 2015).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(x, y, t), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad \text{tal que} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.18)$$

A equação (2.15) representa a advecção do campo vetorial \mathbf{u} . A equação (2.16) descreve os efeitos difusivos de \mathbf{u} , governados pelo coeficiente de viscosidade ν . O coeficiente é referido como a viscosidade cinemática, grandeza que caracteriza a dificuldade ou facilidade do fluido escoar. Valores menores significam que o fluido é de fácil escoamento, e adquire um comportamento predominantemente convectivo. Em alguns casos, o termo viscoso é desconsiderado, uma vez que os fenômenos advectivos são predominantes e, quando resolvida numericamente, a própria dissipação numérica cria um efeito difusivo artificial (BRIDSON, 2015). Na equação (2.17), temos as ações de forças externas que atuam sobre o campo \mathbf{u} . Por fim, o termo da pressão na equação (2.18), também chamado de Condição de Incompressibilidade. Esse termo é responsável por garantir que o movimento do fluido seja também influenciado pela pressão e que a restrição acerca da preservação do volume do fluido, seja atendida. O coeficiente ρ é a densidade do fluido. Comumente, para estudo de fluidos líquidos, essa densidade permanece constante, porém para gases se torna em certos casos uma incógnita de interesse ou uma função conhecida. Em nossas simulações, os valores da viscosidade são ajustados em função do número de Reynolds e a densidade é fixada em 1.

Agrupando as equações (2.15) e (2.16) e negligenciando as forças externas \mathbf{F}

podemos reescrever o sistema (2.15)-(2.18) como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{tal que} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.20)$$

onde é possível perceber que, em sua essência, a equação (2.19) é um problema de transporte vetorial com um termo não linear, e a equação (2.20) exibe um termo restritivo relacionado a pressão. Um dos problemas evidentes é a falta de um termo explícito para a pressão. Podemos obtê-lo com um pouco de manipulação matemática, utilizando a equação (2.14a) e a (2.14b). Esse desenvolvimento é abordado no Capítulo 3 que descreve a metodologia numérica adotada neste trabalho.

Restringindo as equações de transporte (2.19) ao caso bidimensional, podemos apresentá-las como duas equações de transporte escalar, uma para cada componente. Assim, tomando $\rho = 1$, adotando a notação $\mathbf{u} = (u, v)$ e supondo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, podemos apresentar o sistema (2.19)-(2.20) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= F_u(x, y, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= F_v(x, y, t), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O sistema de equações apresentado em (2.21) é adotado neste trabalho e a metodologia numérica usada para resolver este sistema será apresentada no próximo capítulo, onde as equações de transporte referentes às componentes da velocidade são resolvidas pelo método ADI e a equação associada ao campo de pressão é aproximada com o método da Projeção e resolvida iterativamente por um esquema explícito.

É importante comentar acerca da adimensionalização das equações apresentadas, uma vez que essa abordagem permite a generalização dos resultados e a aplicabilidade dos modelos em diferentes escalas e condições físicas. Os coeficientes de viscosidade, assim como os campos de velocidades e densidade dos fluidos, são todos expressos com

dimensões definidas, como metros por segundo (m/s) para a velocidade, quilogramas por metro cúbico (kg/m^3) para a densidade em (kg/m^2) para a viscosidade dinâmica. No entanto, em nossas simulações, todos esses termos dimensionais são agrupados em um número adimensional, denominado Número de Reynolds (R_e), definido como

$$R_e = \frac{\mathbf{u}L}{\nu}, \quad (2.22)$$

onde u é a velocidade característica do escoamento (em metros por segundo, m/s), L é a dimensão característica do sistema (em metros, m), ν é a viscosidade cinemática do fluido (em metros quadrados por segundo, m^2/s), definida como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

onde μ é a viscosidade dinâmica (em pascal-segundo, $Pa \cdot s$) e ρ é a densidade do fluido (em quilogramas por metro cúbico, kg/m^3). O número adimensional de Reynolds (2.22) é definido como a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas atuantes no fluido. Usando este número podemos desconsiderar a dimensionalidade intrínseca dos parâmetros envolvidos, pois ele encapsula, em uma única grandeza, a influência combinada de variáveis como o coeficiente de difusão, a velocidade e a densidade. Dessa forma, o uso do Número de Reynolds nos permite realizar diversos experimentos sem a necessidade de reavaliar as dimensões físicas de cada parâmetro individualmente. Essa característica é particularmente útil na modelagem computacional e na experimentação, por facilitar a comparação entre sistemas geometricamente semelhantes, mas com escalas distintas, permitindo de forma prática a variação das condições das simulações.

3 Metodologia Numérica

Neste capítulo, apresentamos a metodologia numérica utilizada para resolver as equações de Navier-Stokes, conforme apresentada em (2.21). Introduzimos brevemente o método de Diferenças Finitas para aproximação numérica e as abordagens de discretização e localização dos pontos de aproximação usando malhas co-allocadas e escalonadas. Além disso, apresentamos o esquema ADI, utilizado para encontrar uma aproximação para a velocidade através da solução das equações do transporte, e o método da Projeção da Pressão aplicada a solução do campo de pressão e preservação da restrição de incompressibilidade. Por fim, utilizando estas metodologias numéricas, apresentamos um algoritmo sequencial para a solução do problema de Navier-Stokes incompressível.

3.1 Discretização Numérica

Do ponto de vista Euleriano, utilizando o método de diferenças finitas, adotamos uma discretização do domínio fixa no tempo, ou seja, que não sofre alteração a cada passo de resolução no tempo. Considerando um espaço de solução discretizado em células de altura e largura Δh , definido sobre um domínio de dimensão $[x_0, x_f] \times [y_0, y_f]$, a variável $q_{i,j}$, com índices $[i, j]^1$, representa a posição na grade de $N \times N$ nós. A variável q representa um valor qualquer, podendo ele, no nosso caso, ser tanto as componentes da velocidade u e v ou a pressão p , uma vez que o processo é análogo. Assim, q pode apresentar a seguinte discretização

$$\begin{aligned} q_{ij} &= q(j\Delta x - x_0, i\Delta y - y_0), \\ \Delta x &= \frac{(x_f - x_0)}{N}, \quad \Delta y = \frac{(y_f - y_0)}{N}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Apesar de não ser uma limitação da abordagem introduzida neste capítulo, por simplicidade adotamos dimensões iguais nas divisões espaciais, tanto no eixo x quanto no

¹A escolha do sentido dos índices i, j é arbitrária. A utilização dessa orientação em específico vem da maneira que matrizes são convencionalmente representadas em linguagens de programação e na álgebra linear.

eixo y

$$\Delta h = \Delta x = \Delta y. \quad (3.2)$$

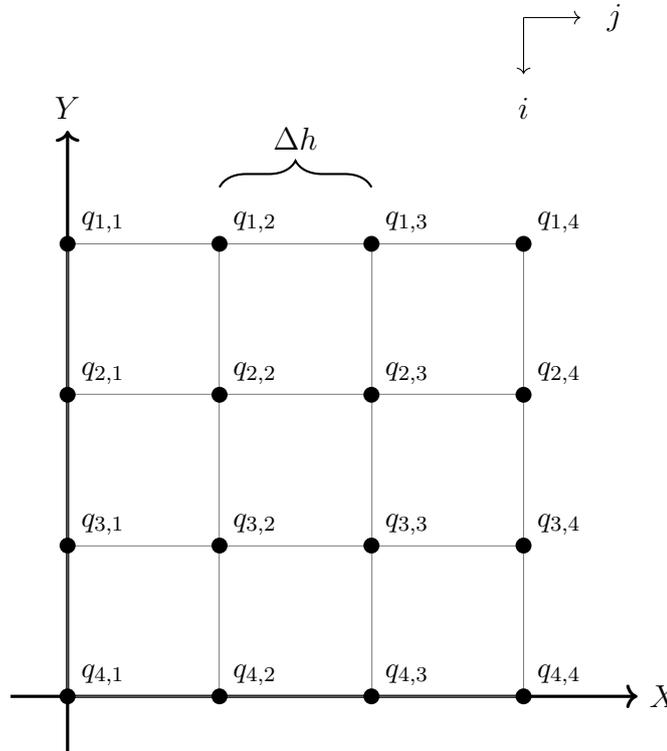


Figura 3.1: Discretização Co-locada com $N = 4$.

A Figura 3.1 exibe a distribuição da variável q em uma grade co-locada com $N = 4$. Neste tipo de abordagem, todas as variáveis do sistema são discretizadas nos mesmos nós da malha. No entanto, essa escolha pode apresentar dificuldades ao lidar com problemas mistos, nos quais diferentes variáveis precisam ser resolvidas simultaneamente. Nesses casos, o uso de malhas co-locadas pode levar a instabilidades e perda de precisão, devido à forma como os nós são posicionados e à maneira como trocam informação entre si (FERZIGER; PERIĆ, 2002). Por isso, para resolver problemas como o de Navier-Stokes, é comumente utilizado a discretização escalonada proposta por Harlow (1964) e conhecida como *MAC Grid* (*Marker and Cell Grid*). Nessa discretização, as variáveis são armazenadas em diferentes pontos das células que formam a grade. Esse arranjo reduz oscilações espúrias e reforça a condição de continuidade naturalmente (BRIDSON, 2015). Nessa grade são armazenadas separadamente as componentes da velocidade nas faces e a pressão no centro da célula. Vale notar que a distância Δh entre os pontos consecutivos

da grade para cada variável se mantêm a mesma da grade co-allocada. A Figura 3.2 exemplifica uma grade MAC para as componentes da velocidade u e v e a pressão p .

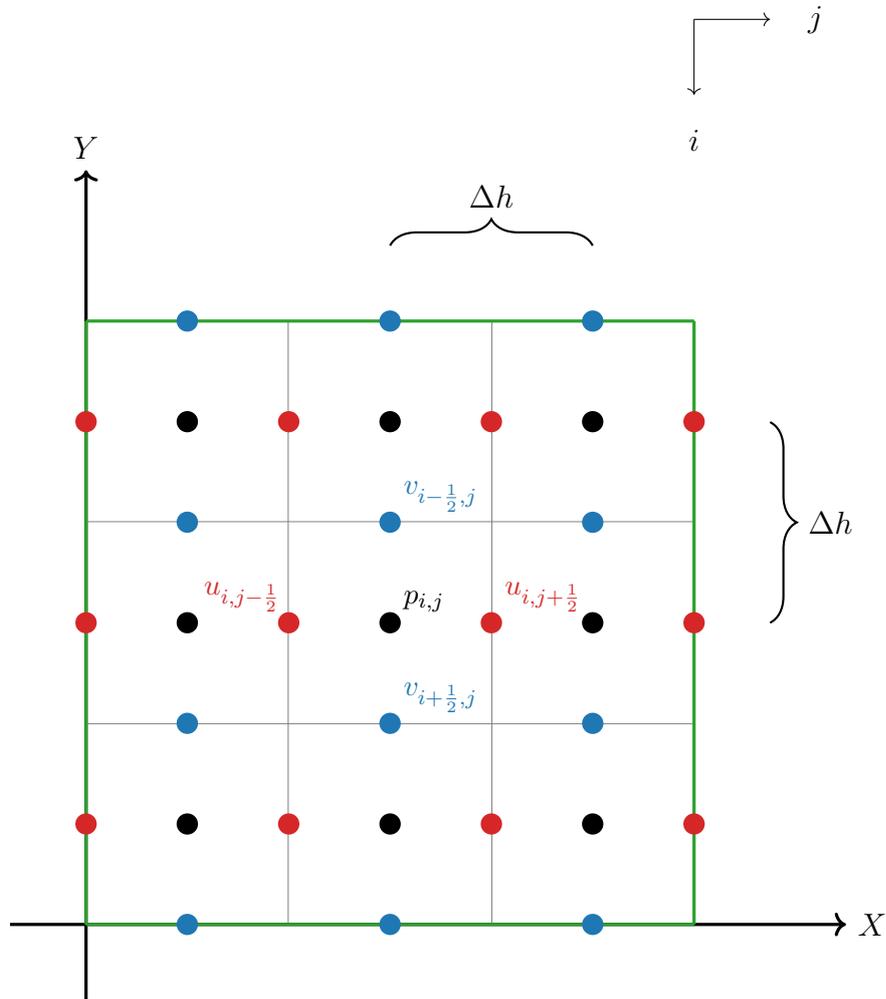


Figura 3.2: Distribuição dos nós em uma grade MAC com 9 células.

Todas as definições de discretização permanecem similares matematicamente a grade co-allocada, porém é importante considerar que agora a grade se torna assimétrica, com $N - 1$ pontos em v na direção X e $N - 1$ em u na direção Y . Utilizamos os valores i, j para representar quantias nos centros das células, como p , e os valores fracionários $\pm 1/2$ para representar os que residem nas arestas da grade. Nesse arranjo, as componentes ficam com índices fracionários, como $u^{i+1/2}$ e $u^{i-1/2}$ para a face direita e esquerda, respectivamente, da célula i, j .

Para obtermos os valores vetoriais da velocidade, agora no centro de cada célula, é utilizado interpolação linear simples. Além disso, conforme descrito em Bridson (2015) e

em Harlow (1964), esse arranjo de grade faz com que as diferenças centrais sejam robustas.

A base dos métodos de diferenças finitas começa com a definição da derivada de uma função

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h}. \quad (3.3)$$

No caso discreto, consideramos uma aproximação para (3.3), onde o parâmetro Δh irá tomar o valor de h , temos

$$\frac{\partial q}{\partial x} \approx \frac{q(x + \Delta h) - q(x)}{\Delta h}. \quad (3.4)$$

A aproximação (3.4) será cada vez melhor a medida que Δh tender a zero. Isso é realizado incrementando o valor de nós N da grade, aumentando o número de graus de liberdade no domínio discretizado. Conseqüentemente, também há um aumento na quantidade de equações a serem resolvidas. Seguindo o raciocínio, podemos tomar a definição do divergente de uma função $\mathbf{u}(x, y)$,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.5)$$

Ao aplicar em (3.5) a definição da discretização (3.4) explícita, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(x, y) \approx \frac{\mathbf{u}(x + \Delta h, y) - \mathbf{u}(x, y)}{\Delta h} + \frac{\mathbf{u}(x, y + \Delta h) - \mathbf{u}(x, y)}{\Delta h}. \quad (3.6)$$

A discretização (3.6), apesar de válida, possui problemas. O principal é o viés em um sentido, pois ignoramos o valor do ponto anterior ao ponto de interesse. Uma discretização possível que não possui esse viés é (3.7).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \approx \frac{\mathbf{u}(x + \Delta h/2, y) - \mathbf{u}(x - \Delta h/2, y)}{\Delta h} + \frac{\mathbf{u}(x, y + \Delta h/2) - \mathbf{u}(x, y - \Delta h/2)}{\Delta h}, \quad (3.7)$$

Coincidentemente, os valores da função deslocados $\pm \Delta h/2$ são os pontos u e v das arestas da grade MAC, e então, definimos o divergente como

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{i,j} = \frac{u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2}}{\Delta h} + \frac{v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j}}{\Delta h}. \quad (3.8)$$

Em (3.8), o cálculo do divergente discreto é feito de maneira mais consistente, uma vez que coincide com a pressão p no centro da célula, reduzindo oscilações espúrias e reforçando a Condição de Conservação de Massa durante a projeção.

Em relação às condições de contorno, bordo ou fronteira, representado pela linha verde na Figura 3.2, o uso da grade MAC pode exigir a extrapolação dessas condições para fora da discretização, uma vez que pode haver a necessidade de aproximar pontos que residem fora da grade de aproximação, assim como é feito na grade tradicional co-allocada (FERZIGER; PERIĆ, 2002). Para as condições de Dirichlet, o tratamento é direto. Nesse caso, a solução é conhecida nos pontos do contorno. Nesse tipo de condição de fronteira, os termos conhecidos são movidos para o termo fonte e somente os pontos internos da grade são resolvidos no sistema resultante.

As condições de Neumann diferem das condições de Dirichlet pelo fato de que, no contorno, não temos o valor conhecido da solução, mas sim o valor de sua derivada. Isso implica que, enquanto as condições de Dirichlet especificam diretamente o valor da função no contorno, as condições de Neumann impõem uma restrição sobre a taxa de variação da função nessa região. O tratamento matemático e numérico das condições de Neumann é geralmente mais complexo, pois envolve a manipulação de derivadas, o que pode introduzir desafios adicionais na discretização e na estabilidade do método numérico utilizado. No entanto, neste trabalho, os problemas simulados exigiram somente a imposição de condições homogêneas de Neumann (derivada igual a zero). Neste caso, uma maneira comum de implementar essas condições numericamente é extrapolar os valores conhecidos da solução no interior do domínio para os pontos do contorno, garantindo que a derivada no contorno seja zero.

Tendo toda a discretização espacial realizada, podemos tratar o termo transiente da equação. O termo transiente, também denominado termo temporal, introduz a derivada temporal na equação, e é fundamental para a caracterização de fenômenos que evoluem ao longo do tempo, conferindo ao problema um caráter dinâmico, podendo, ou não, evoluir a um caso estacionário.

Para a discretização no tempo, o processo é extremamente similar ao espacial, porém, como o tempo se trata de somente uma dimensão, a visualização é representada

por uma reta sendo repartida em pontos igualmente espaçados por um valor Δt . No esquema ADI, apresentado a seguir na seção 3.2, a discretização é feita em passos de tempo igualmente espaçados, com estágios intermediários $\Delta t/2$. Um exemplo dessa discretização temporal pode ser visualizada na Figura 3.3.

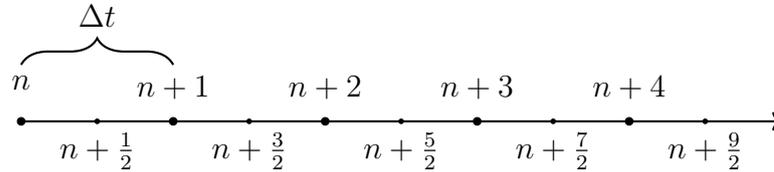


Figura 3.3: Discretização Temporal

3.2 Método Implícito de Direções Alternadas (ADI)

Nessa seção, primeiramente apresentamos o método ADI proposto por Peaceman e Rachford Jr (1955) para o problema clássico do calor. Discutimos também a inclusão e o tratamento do termo convectivo. Neste contexto, aplicamos a metodologia ADI para a discretização das equações de transporte (2.21) em uma grade MAC.

3.2.1 Método Peaceman-Rachford

O método ADI, proposto por Peaceman e Rachford Jr (1955), foi inicialmente desenvolvido para a resolução de equações diferenciais parciais elípticas bidimensionais, como a equação difusiva do calor apresentada como segue

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3.9)$$

onde T é a temperatura. Métodos numéricos implícitos e explícitos existem para a solução dessa equação. Uma discretização explícita possível, ao tomar uma grade onde $\Delta h = \Delta x = \Delta y$, indexada nos pontos i, j e no passo de tempo n pode ser apresentada como

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{1}{\Delta h} (T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n - 4T_{i,j}^n). \quad (3.10)$$

Essa abordagem tem a vantagem de não necessitar a resolução de sistemas lineares, entretanto, impõe restrições notáveis sobre o refinamento da grade e o passo temporal, o que pode elevar consideravelmente o custo computacional. Segundo Peaceman e Rachford Jr (1955), a resolução dessa discretização, ao atender a condição de estabilidade dada por $\Delta t \leq \frac{1}{4N^2}$, significaria a necessidade de, no mínimo, $28N^4t$ operações matemáticas.

Neste sentido, buscando uma alternativa menos custosa computacionalmente e que não exigisse condições rígidas de estabilidade, Peaceman e Rachford Jr (1955) propuseram uma metodologia que alterna entre o uso de aproximações implícitas para a derivada em uma direção em um passo de tempo $n + 1/2$ e derivadas implícitas na direção ortogonal no passo de tempo $n + 1$. Dessa forma, em cada iteração, um conjunto de derivadas espaciais em uma direção é tratado implicitamente, com as da outra direção explicitamente, utilizando valores de passos de tempo anteriores, enquanto no próximo passo o outro conjunto de derivadas é discretizado de maneira implícita. Este procedimento, aplicado ao problema (3.9), é descrito matematicamente no sistema de equações apresentado a seguir

$$\begin{cases} \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \frac{T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta h^2}, \\ \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \frac{T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta h^2}. \end{cases} \quad (3.11)$$

No sistema (3.11), a cada passo de tempo $n + 1/2$ e $n + 1$ é gerada uma matriz tri-diagonal, que apresenta um reduzido custo computacional quando aplicado um método direto para a resolução de sistemas lineares. Esta metodologia também apresenta convergência quadrática no tempo e no espaço, conforme demonstrado no artigo de Peaceman e Rachford Jr (1955). Além disso, para o caso bidimensional, o método é incondicionalmente estável, ou seja, não apresenta restrições de escolha entre Δt e Δh . Mais tarde, em Douglas (1962), o método foi estendido para 3 dimensões espaciais, adotando uma discretização temporal que torna a metodologia incondicionalmente estável.

Ao adicionar ao problema do calor (3.9) um termo convectivo que representa o transporte do campo escalar T por um campo de velocidades \vec{u} , que atende à restrição de

incompressibilidade $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, obtemos a equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (3.12)$$

A equação (3.12) é conhecida como a Equação de Transporte Geral e é amplamente utilizada na modelagem de fenômenos de transporte de quantias escalares sobre um campo de velocidade conhecido (FERZIGER; PERIĆ, 2002). Uma de suas características matemáticas fundamentais está relacionada à predominância de um dos mecanismos de transporte. Como a equação contém tanto um termo difusivo quanto um termo convectivo, o comportamento do transporte — e conseqüentemente a estabilidade da sua resolução numérica — depende de qual desses fenômenos é dominante.

Para avaliar essa predominância, utiliza-se o Número de Péclet, que representa a razão entre a taxa de transporte por convecção e a taxa de transporte por difusão. Quando esse número é alto, a convecção é dominante, o que pode gerar dificuldades numéricas, como oscilações e instabilidades na solução. Em particular, valores muito elevados, como 10^4 , indicam um regime fortemente convectivo, onde métodos numéricos convencionais podem ter dificuldades em fornecer soluções estáveis e precisas. No contexto de simulações numéricas, o Número de Péclet de malha é uma versão discretizada desse conceito, que leva em conta o tamanho dos elementos da malha utilizada no modelo. Ele mede a relação entre o transporte convectivo e o transporte difusivo na escala da discretização. Quando esse número ultrapassa o valor de 1, os efeitos convectivos tornam-se predominantes na resolução numérica, o que pode levar à perda de precisão e, em alguns casos, à divergência da solução.

Para a discretização do termo convectivo, podemos utilizar diversas técnicas, como diferença central, *upwind*, entre outras (LEVEQUE, 2007). A diferença central é um esquema de discretização de segunda ordem no qual o valor em um ponto da grade não é diretamente utilizado no cálculo, sendo substituído por uma média baseada nos valores de seus vizinhos. Essa abordagem permite obter uma discretização sem viés em relação à direção do campo de velocidades, garantindo maior precisão em determinadas condições. No entanto, sua estabilidade é limitada, e em problemas predominantemente convectivos, a escolha inadequada do tamanho da malha (Δh) e do Número de Péclet pode

levar à instabilidade numérica e, em alguns casos, à divergência da solução. Neste caso, empregando uma discretização de diferença central para o termo convectivo da equação (3.12), podemos reescrever o sistema (3.11) como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\Delta t/2} - \frac{T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} + u \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta h} = \\ \quad + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta h^2} - v \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta h}, \\ \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} - \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta h^2} + v \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta h} = \\ \quad \frac{T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} - u \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta h}. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Ao contrário de (3.13), a discretização *upwind* ajusta a formulação numérica conforme a direção do campo de velocidades, reduzindo os efeitos de instabilidade típicos de problemas predominantemente convectivos. No entanto, essa abordagem utiliza esquemas de primeira ordem para a discretização da derivada do termo convectivo, que variam conforme o sentido do fluxo. Como consequência, a ordem de convergência da metodologia ADI é reduzida de segunda para primeira ordem, impactando a precisão da solução. Em (3.14) é apresentado o esquema *upwind* para a discretização do termo convectivo no primeiro passo intermediário.

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h}, \quad \text{se } u > 0 \\ u \frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h}, \quad \text{se } u \leq 0 \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} v \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h}, \quad \text{se } v > 0 \\ v \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h}, \quad \text{se } v \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

e para o último passo intermediário.

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta h}, \quad \text{se } u > 0 \\ u \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta h}, \quad \text{se } u \leq 0 \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} v \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta h}, \quad \text{se } v > 0 \\ v \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta h}, \quad \text{se } v \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

3.2.2 Formulação na Grade Escalonada

Nesta seção apresentamos uma abordagem numérica utilizando o método ADI combinado com uma discretização por diferença central para o termo convectivo para resolver a

equação vetorial de transporte da velocidade (2.19). No problema em questão, o campo de velocidade é uma incógnita cujas equações exigem um tratamento especial devido à não linearidade introduzida pelo termo convectivo. Para lidar com essa complexidade, adotamos a estratégia de considerar o campo de velocidade como “atrasado” no tempo em todas as iterações temporais. Essa abordagem simplifica a implementação e melhora o desempenho computacional, pois elimina a necessidade de resolver as equações não lineares do campo de velocidade utilizando métodos mais avançados, como o método de Newton.

Além disso, como nosso foco está na solução estacionária, não buscamos resolver a linearização a cada passo de tempo. A metodologia pseudo-transiente que será adotada tem como objetivo viabilizar o uso das abordagens numéricas ADI e de projeção de pressão, ao mesmo tempo em que proporciona maior estabilidade ao problema.

Dessa forma, adotando a distribuição nodal de uma malha escalonada (ver Fig. (3.2)), discretizamos as componentes u e v referentes às duas primeiras equações de (2.21) nos pontos $(i, j) \pm 1/2$ e atrasamos no tempo as velocidades do termo convectivo, calculando-as no passo de tempo n para tornar o termo linear. Neste contexto, adaptamos a discretização apresentada em (3.13) para a componente u , como segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \frac{u_{i-1/2,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i+1/2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} + \frac{u_{i,j+1/2}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1/2}^n}{\Delta h^2} \\ \quad - u_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1/2}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1/2}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta h} - v_{i,j}^n \frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{2\Delta h}, \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \frac{u_{i-1/2,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i+1/2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} + \frac{u_{i,j+1/2}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta h^2} \\ \quad - u_{i,j}^{n+1} \frac{u_{i,j+1/2}^{n+1} - u_{i,j-1/2}^{n+1}}{2\Delta h} - v_{i,j}^n \frac{u_{i+1/2,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1/2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta h}, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

e para v

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \frac{v_{i-1/2,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i+1/2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} + \frac{v_{i,j+1/2}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1/2}^n}{\Delta h^2} \\ \quad - u_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1/2}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i,j-1/2}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta h} - v_{i,j}^n \frac{v_{i+1/2,j}^n - v_{i-1/2,j}^n}{2\Delta h}, \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \frac{v_{i-1/2,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i+1/2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta h^2} + \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta h^2} \\ \quad - u_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{2\Delta h} - v_{i,j}^n \frac{v_{i+1/2,j}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-1/2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta h}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

A discretização resultante da utilização desse método nos proporciona uma matriz tri-diagonal para cada componente, em cada passo intermediário de tempo. Isso é extremamente vantajoso computacionalmente, uma vez que o Algoritmo de Thomas (THOMAS, 1949) pode ser utilizado para a resolução do sistema de forma direta com complexidade computacional linear. Além disso, é possível perceber que as equações de u e v são completamente desacopladas. Isso só é possível em decorrência do atraso do termo do campo da velocidade associado ao termo convectivo. Dessa forma, otimizações e ganho de desempenho são obtidas durante a implementação computacional, uma vez que é possível a resolução independente de cada componente. Isso foi explorado por uma estratégia de paralelização descrita na Seção 3.4.

3.3 Projeção de Pressão

Nesta seção, apresentamos a metodologia utilizada para a solução do campo de pressão a partir da equação (2.20), assegurando o atendimento da condição de incompressibilidade por meio da Projeção da Pressão, proposta por Chorin (1967). Esse método consiste, inicialmente, na resolução segregada do campo de velocidades não conservativo, que é então utilizado para resolver explicitamente uma equação para a pressão, conhecida como Equação de Pressão de Poisson. Em seguida, o campo de pressão obtido é empregado para corrigir o campo de velocidades, impondo a restrição de conservação de massa e garantindo a incompressibilidade do escoamento.

Para apresentar a derivação do método da Projeção da Pressão, aplicamos a

discretização temporal pelo método de Euler à equação da restrição da pressão (2.20). Assumimos que a densidade $\rho = 1$. Considerando o campo $\hat{\mathbf{u}}$ como o obtido ao solucionar a discretização (3.16) e (3.17) feita pelo método ADI, obtemos

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} = -\nabla p. \quad (3.18)$$

Aplicando o divergente em ambos os lados da equação (3.18), temos como resultado

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^n) = \nabla \cdot (-\Delta t \nabla p). \quad (3.19)$$

Assumindo que o fluido é incompressível, considerando a hipótese de $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$, podemos organizar os termos para apresentar a seguinte Equação de Pressão de Poisson

$$\begin{aligned} \cancel{\nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+1})} - \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}^n) &= \nabla \cdot (-\Delta t \nabla p) \quad \text{e portanto} \\ \nabla^2 p &= \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}^n). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Essa equação fornece um termo explícito para a pressão que pode ser aproximado a partir de um campo de velocidade previamente calculado. É importante ressaltar que esse esquema de correção é uma característica do mundo discreto, e não é aplicável no contínuo. Isso se dá pelo fato de existirem campos \mathbf{u} intermediários e em diferentes etapas de tempo, com a divergência não nula.

Uma alternativa numérica é discretizar a equação de pressão utilizando um método de diferença central para o Laplaciano combinado com uma discretização para o divergente na grade MAC apresentado na equação (3.8). Neste contexto, obtemos a seguinte discretização, similar a desenvolvida em Stam (2003).

$$\frac{p_{i+1,j} - 4p_{i,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1}}{\Delta h^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\hat{u}_{i+1/2,j} - \hat{u}_{i-1/2,j}}{\Delta h} + \frac{\hat{v}_{i,j+1/2} - \hat{v}_{i,j-1/2}}{\Delta h} \right). \quad (3.21)$$

A equação (3.21) tem como incógnita o campo escalar p , destacando-se a sua estrutura diagonal dominante, viabilizando a aplicação de métodos iterativos como os algoritmos de Jacobi ou Gauss-Seidel para sua resolução. Além disso, mesmo que a equação não possua um termo transiente, o problema nos oferece o passo anterior para um

chute inicial da pressão para o algoritmo iterativo. Essa estratégia melhora a eficiência do processo iterativo e também acelera consideravelmente a convergência da solução, reduzindo o custo computacional associado à solução. Podemos reescrever essa equação de forma a permitir a resolução iterativa, processando cada célula individualmente e utilizando a pressão do passo anterior, p^n , como chute inicial. Para isso, multiplicamos a equação por $\frac{\Delta h}{4}$ e isolamos o termo desconhecido p^{n+1} no lado esquerdo, obtendo a expressão

$$p_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{\Delta h^2}{4\Delta t} \right) (p_{i-1,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j-1}^n + p_{i,j+1}^n + B) \quad \text{onde} \quad (3.22)$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \frac{\hat{u}_{i+1/2,j} - \hat{u}_{i-1/2,j}}{\Delta h} + \frac{\hat{v}_{i,j+1/2} - \hat{v}_{i,j-1/2}}{\Delta h}.$$

Nessa forma, utilizamos o algoritmo de Gauss-Seidel para iterar sob cada valor de p^{n+1} até que a diferença entre duas iterações consecutivas atinjam um critério de convergência pre-estabelecido. Neste trabalho, o critério adotado foi a diferença entre iterações subsequentes sendo inferior a 10^{-12} . Nas simulações realizadas no Capítulo 4, foi observado que a pressão converge em no máximo 9 iterações e em média realiza 3 iterações.

Assim, uma vez obtido o campo de pressão, a partir da equação (3.22), a velocidade com a restrição da incompressibilidade no passo $n + 1$ é recuperada utilizando a equação da Pressão (3.18) escrita como segue

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^n - \Delta t \nabla p. \quad (3.23)$$

Essa abordagem é matematicamente consistente e comprova a hipótese feita na equação (3.20), por meio da utilização do Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge. O Teorema afirma que, dado um campo vetorial que atende certas restrições (em particular, pertencer ao espaço L^2), esse campo pode ser escrito como a soma de duas componentes, uma livre de divergente e outra livre de rotacional. Temos isso descrito em variáveis quaisquer como

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{B} + \mathbf{C}, \quad \text{onde} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\nabla \times \mathbf{C} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Manipulando a equação, podemos isolar o campo livre de divergência, obtendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{A} - \mathbf{C}, \quad \text{onde} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\nabla \times \mathbf{C} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Igualando a equação (3.23) à (3.25), o termo livre de rotacional é $C = \Delta t \nabla p$, pois por definição matemática, um campo vetorial obtido pelo gradiente de um campo escalar é livre de rotacional e único (CHORIN; MARSDEN; MARSDEN, 1990). Seguindo o raciocínio, $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{u}}^n$ e por consequência, o campo $\mathbf{B} = \mathbf{u}^{n+1}$. Confirmamos então a hipótese feita na equação (3.20) que o campo \mathbf{u}^{n+1} é livre de divergência.

Dessa forma, utilizando uma discretização central na equação (3.23) para cada componente do gradiente da pressão e calculando o campo de velocidade nos nós da grade escalonada, podemos aplicar o gradiente da pressão obtida em (3.22) para corrigir cada componente da velocidade com a restrição da incompressibilidade, como segue

$$\begin{aligned}
u_{i,j+1/2}^{n+1} &= \hat{u}_{i,j+1/2}^n - \Delta t \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta h}, \\
v_{i+1/2,j}^{n+1} &= \hat{v}_{i+1/2,j}^n - \Delta t \frac{p_{i+1,1}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta h}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Assim, podemos realizar esse cálculo e o campo de velocidade passa a atender à restrição de incompressibilidade.

3.4 Estratégia de Resolução

Combinando os diferentes desenvolvimentos matemáticos apresentados nas seções anteriores, nesta seção vamos descrever um processo iterativo para a solução do modelo (2.21).

A partida do algoritmo iterativo se dá com um campo inicial de velocidade \mathbf{u}^0 e condições de contorno definidas sobre o domínio Ω . Utilizando a discretização pelo método

ADI para cada componente da velocidade, apresentada nas equações (3.16) e (3.17), calculamos um campo intermediário $\hat{\mathbf{u}}^1$. Contudo, esse campo não satisfaz a restrição de incompressibilidade (2.14b). Para corrigir o campo de velocidades incluindo a restrição de incompressibilidade, utilizamos a equação (3.22) para o cálculo do campo escalar de pressão p . Para isso, utilizamos o campo intermediário $\hat{\mathbf{u}}^1$ para calcular a pressão a partir da Equação de Poisson (3.20), empregando o método de Gauss-Seidel. Uma vez calculada a pressão, aplica-se a Projeção ao campo intermediário $\hat{\mathbf{u}}^1$, como apresentado em (3.26), atualizando o campo intermediário em um novo campo livre de divergente, agora denotado por \mathbf{u}^1 . Esse processo remove a divergência do campo garantindo a conservação de massa (2.14b). Esse procedimento é então repetido iterativamente, utilizando o campo atualizado da iteração anterior como entrada para a próxima iteração, até que um critério de convergência pré-definido seja atendido. O Algoritmo 1 descreve o passo a passo desse processo iterativo

Algoritmo 1: Esquema de Solução Sequencial.

Entrada: Condição Inicial (\mathbf{u}^0 e p^0), Condições de Contorno.

Saída: Campo Final (\mathbf{u}^f); Pressão Final (p^f)

```

1 início
2    $\mathbf{u}^n \leftarrow \mathbf{u}^0$ ;  $\mathbf{u}^{n+1} \leftarrow 0$ ;
3   enquanto ( $|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n| > Tolerância$ ) faça
4      $\hat{\mathbf{u}}^n \leftarrow SolveADI(\mathbf{u}^n, \mathbf{F})$ ;
5      $p^{n+1} \leftarrow SolvePoisson(p^n, \hat{\mathbf{u}}^n)$ ;
6      $\mathbf{u}^{n+1} \leftarrow Project(\hat{\mathbf{u}}^n, p^{n+1})$ ;
7      $\mathbf{u}^n \leftarrow \mathbf{u}^{n+1}$ ;  $p^n \leftarrow p^{n+1}$ ;
8   fim enquanto
9    $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}^n$ ;  $p^f = p^n$ ;
10 fim
```

No Algoritmo 1, a função $SolveADI()$ recebe um campo de velocidade \mathbf{u} , as componentes u e v e um termo fonte F , e retorna um campo $\hat{\mathbf{u}}^n$ que não atende a restrição de conservação, esse procedimento foi desenvolvido na Seção 3.2. Para a solução do sistema resultante da discretização do ADI, é utilizado o Algoritmo de Thomas (THOMAS, 1949), implementado diretamente com o auxílio da biblioteca Numpy. Em seguida, a chamada

SolvePoisson() recebe o campo de pressão da iteração anterior e o campo intermediário da velocidade. Na iteração inicial, o campo de pressão p^0 é zero. Assim, a Equação de Pressão de Poisson é resolvida conforme apresentado na seção 3.3 usando o algoritmo iterativo de Gauss-Seidel até que o critério de convergência seja atendido e retornando um novo campo p^{n+1} . Em seguida, a rotina *Project()* é chamada, passando o campo intermediário da velocidade e o campo de pressão, onde é realizado o cálculo (3.26) retornando o campo de velocidade incompressível \mathbf{u}^{n+1} . A implementação é feita em toda sua extensão utilizando *arrays* da biblioteca numérica Numpy, com o uso das funções vetorizadas que permitem operações mais rápidas quando feitas sobre vetores e matrizes.

Esse processo iterativo é muito similar ao proposto por Stam (2003). Entretanto, aqui temos um controle maior sob o passo temporal e tolerância entre as iterações, já que o valor de Δt no trabalho de Stam (2003) varia conforme o tempo de processamento da iteração. Além disso, nosso processo de *splitting* não divide a solução do passo convectivo (advecção) do passo difusivo, ambos são resolvidos simultaneamente com o método ADI.

Dado o desacoplamento das componentes da velocidade, podemos modificar nosso algoritmo a fim de resolver cada componente de maneira independente. A solução da pressão age como uma barreira computacional para o progresso do algoritmo, uma vez que só é possível resolvê-la após a aproximação de ambas as componentes da velocidade.

Algoritmo 2: Esquema de Solução Paralela.**Entrada:** Condição Inicial (\mathbf{u}^0 e p^0), Condições de Contorno.**Saída:** Campo Final (\mathbf{u}^f); Pressão Final (p^f)

```

1 início
2    $\mathbf{u}^n \leftarrow \mathbf{u}^0$ ;  $\mathbf{u}^{n+1} \leftarrow 0$ ;
3   enquanto ( $|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n| > Tolerância$ ) faça
4      $u^n \leftarrow SolveXADI(\mathbf{u}^n, \mathbf{F})$  //Chamada Paralela;
5      $v^n \leftarrow SolveYADI(\mathbf{u}^n, \mathbf{F})$  //Chamada Paralela;
6      $p^{n+1} \leftarrow SolvePoisson(p^n, u^n, v^n)$ ;
7      $\mathbf{u}^{n+1} \leftarrow Project(\hat{\mathbf{u}}^n, p^{n+1})$ ;
8      $\mathbf{u}^n \leftarrow \mathbf{u}^{n+1}$ ;  $p^{n+1} \leftarrow p^n$ ;
9   fim enqto
10   $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}^n$ ;  $p^f = p^n$ ;
11 fim

```

Desse modo, temos as chamadas *SolveXADI* e *SolveYADI* como chamadas paralelas, que ocorrem concorrentemente. A implementação dessa paralelização foi realizada com o auxílio da biblioteca *Ray*, disponível para Python, que permite a execução distribuída por meio de *forks* do processo pai que contém o código concorrente. Assim, cada componente da velocidade, u e v , foi encapsulada em uma função separada e resolvida independentemente em dois núcleos distintos do processador.

A resolução da pressão atua como uma barreira computacional, sendo iniciada somente após a conclusão do processo de cálculo de ambas as componentes da velocidade. Os resultados dessa implementação paralela são apresentados na Seção 4.4. Observou-se que essa estratégia proporciona um ganho de desempenho computacional que cresce exponencialmente com o refinamento da grade. No caso mais refinado, com 128×128 nós, a abordagem paralela resultou em uma redução de aproximadamente 250% no custo computacional da resolução pelo método ADI.

4 Resultados

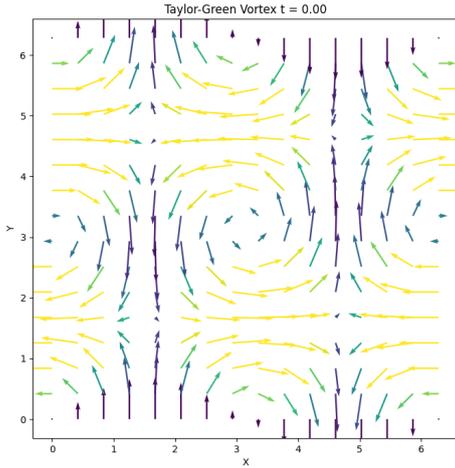
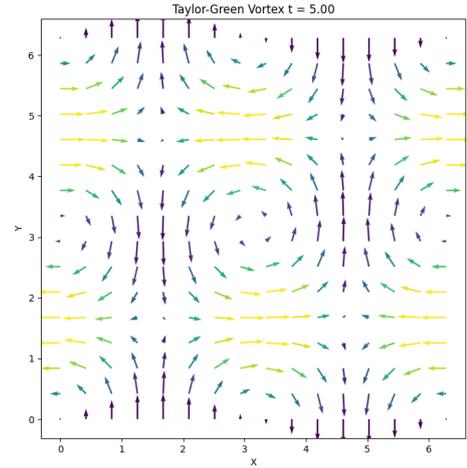
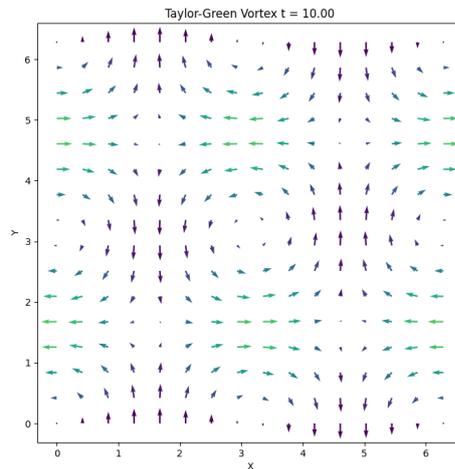
Utilizando a metodologia numérica apresentada no Capítulo 3, neste capítulo apresentamos e discutimos os resultados obtidos a partir da aplicação do método em quatro experimentos computacionais que visam validar a metodologia estudada através de estudos de convergência e comparação com dados experimentais da literatura. Para estudos de convergência, utilizamos a solução de Taylor-Green (TAYLOR; GREEN, 1937) para o caso transiente e a solução de Kovasznay (KOVASZNAY, 1948) para o caso estacionário. A Simulação de dois casos mais realistas foi usada para validação do método a partir de dados da literatura. Neste contexto, simulamos experimento da cavidade (*Lid-driven cavity flow*), como apresentado em Ghia, Ghia e Shin (1982) e o experimento do escoamento sobre degrau (*backwards facing step*), utilizando como base os dados experimentais do trabalho desenvolvido por Armaly et al. (1983). Esses experimentos abrangem diferentes objetivos tais como a demonstração da conservação de massa e comportamento do escoamento do fluido sob certas condições.

Para cada um dos experimentos, apresentamos uma breve revisão da metodologia experimental original, ressaltando as condições de contorno, os parâmetros físicos e numéricos envolvidos, bem como as métricas analisadas.

4.1 Estudo de Convergência: Caso Transiente

A solução de Taylor e Green (1937) foi proposta durante um estudo analítico acerca de vórtices. Essa solução consiste em vórtices que se degeneram com a passagem do tempo, como é possível visualizar no conjunto de Figuras 4.1 a 4.3 que demonstram o campo de velocidade e sua magnitude.

A solução analítica para cada componente vetorial da velocidade e a pressão são

Figura 4.1: Magnitude de \mathbf{u} em $t=0.0$ Figura 4.2: Magnitude de \mathbf{u} em $t=5.0$ Figura 4.3: Magnitude de \mathbf{u} em $t=10.0$

apresentados a seguir

$$\begin{aligned}
 u &= -\cos(x) \sin(y) e^{\frac{-2t}{Re}}, \\
 v &= \sin(x) \cos(y) e^{\frac{-2t}{Re}}, \\
 p &= -\frac{1}{4}(\cos(x) + \cos(y)) e^{\frac{-4t}{Re}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Uma das vantagens desta solução é que ela é apresentada em função do número de Reynolds, o que a torna comum no uso de estudos e validação de soluções aproximadas (ORSZAG, 1974), possibilitando a realização de vários estudos com diferentes valores para este parâmetro. Além disso, o resultado é analítico, o que possibilita a realização de um estudo de convergência para a demonstração da ordem de aproximação e a da precisão

da solução da metodologia numérica estudada. É notável também que a solução exata é válida em todo o domínio \mathbb{R}^2 .

Foram realizados dois estudos de convergência, diferenciados pela escolha do passo de tempo, fixados em $\Delta t = \Delta h$ e $\Delta t = \Delta h^2$. Assumindo um domínio espacial $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ e temporal $T = [0, 1]$. Para este estudo, variamos a quantidade de nós da grade $N \in [8, 16, 32, 64, 128]$ para o caso quadrático e $N \in [8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]$ para o linear. Assim, para cada N , foi calculado o erro na norma do máximo para o campo de velocidades no instante de tempo $T = 1$. O erro na norma do máximo é calculado segundo a expressão

$$E_{max} = \max(|\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_{ij}|) \quad \text{para } i, j \in [0, N], \quad (4.2)$$

tomando \mathbf{u}_e como a solução exata no ponto correspondente (i, j) . Repetindo o mesmo processo para diferentes escolhas do número de Reynolds, geramos a Figura 4.4, com ambos os eixos em escala logarítmica de base 2, do erro em função do valor de N .

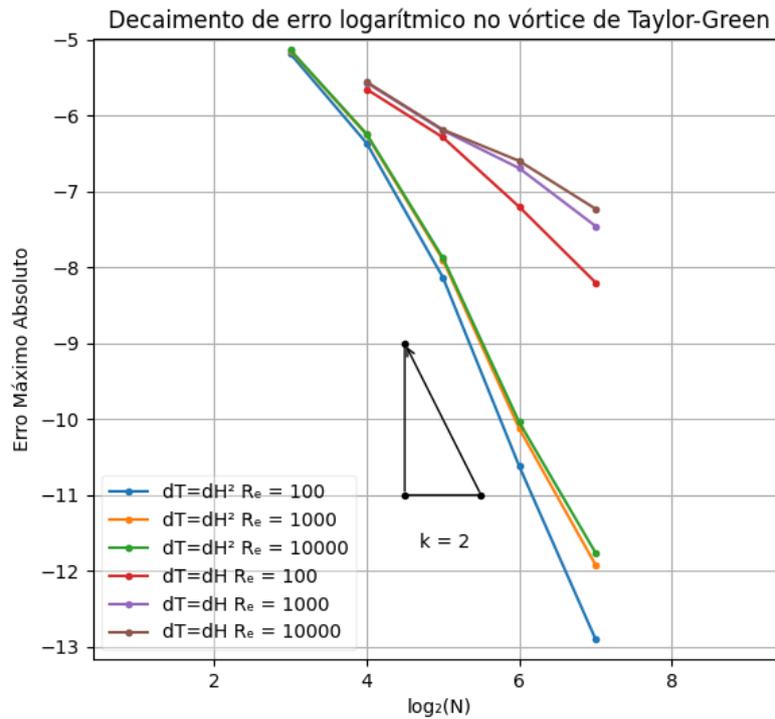


Figura 4.4: Convergência da velocidade utilizando $\Delta t = \Delta h$ e $\Delta t = \Delta h^2$ para diferentes números de Reynolds.

Na Figura 4.4 é possível observar que, para valores baixos de R_e , o erro decresce mais rapidamente, indicando que o método se mostra mais estável em um cenário mais difusivo. Já para valores altos de R_e , a taxa de convergência diminui, destacando a necessidade de malhas mais refinadas para capturar adequadamente os fenômenos de predominância convectiva associados a maiores números de Reynolds. Essa análise reforça a importância de ajustar Δh e Δt conforme o regime do fluxo, seja ele turbulento ou laminar.

Com $R_e = 1000$, foi realizado um estudo do erro similar, tanto com a variável p quanto para ∇p , de modo a se obter a ordem de convergência de ambos ao utilizar o esquema da Projeção. Com a Figura 4.4, podemos observar que a ordem de convergência do gradiente é uma ordem menor que a da sua respectiva pressão. Isso condiz com o esperado teórico. A pressão no caso de $\Delta t = \Delta h^2$ adquire uma convergência quadrática, com seu gradiente sendo linear.

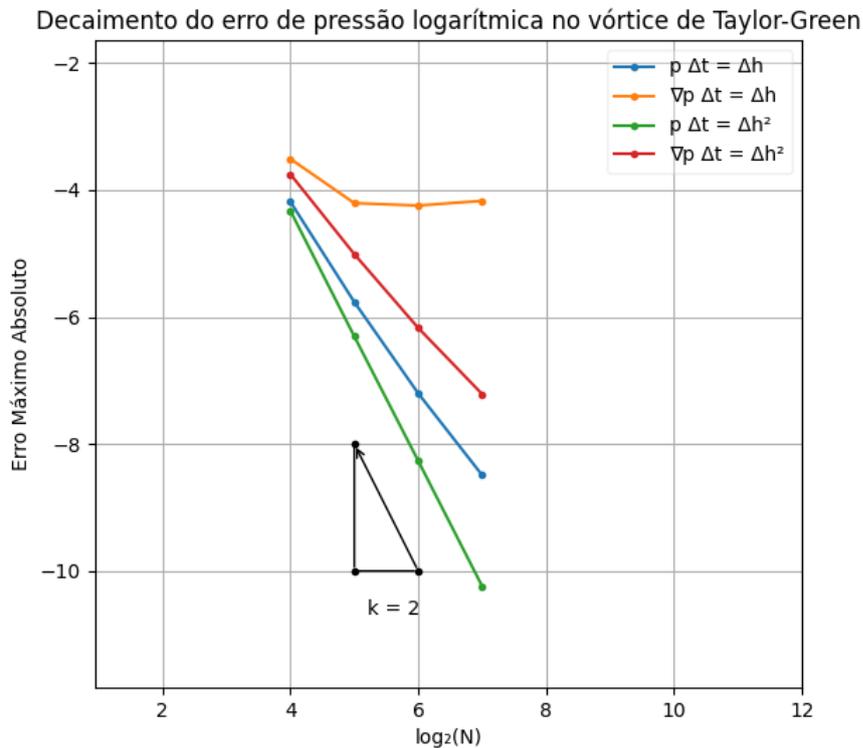


Figura 4.5: Estudo de Convergência da Pressão para $R_e = 1000$.

Relacionado ao estudo da pressão, apresentamos um estudo a respeito da con-

servação de massa baseado no cálculo do divergente total, antes e depois da projeção de pressão, para cada passo de tempo. O divergente total é obtido utilizando a soma do valor absoluto do divergente dado em (3.8) calculado em cada nó central. Os resultados são apresentados na Figura 4.6 para um domínio 64×64 , onde é possível notar que após a projeção, o divergente se mantém nulo em todo o domínio.

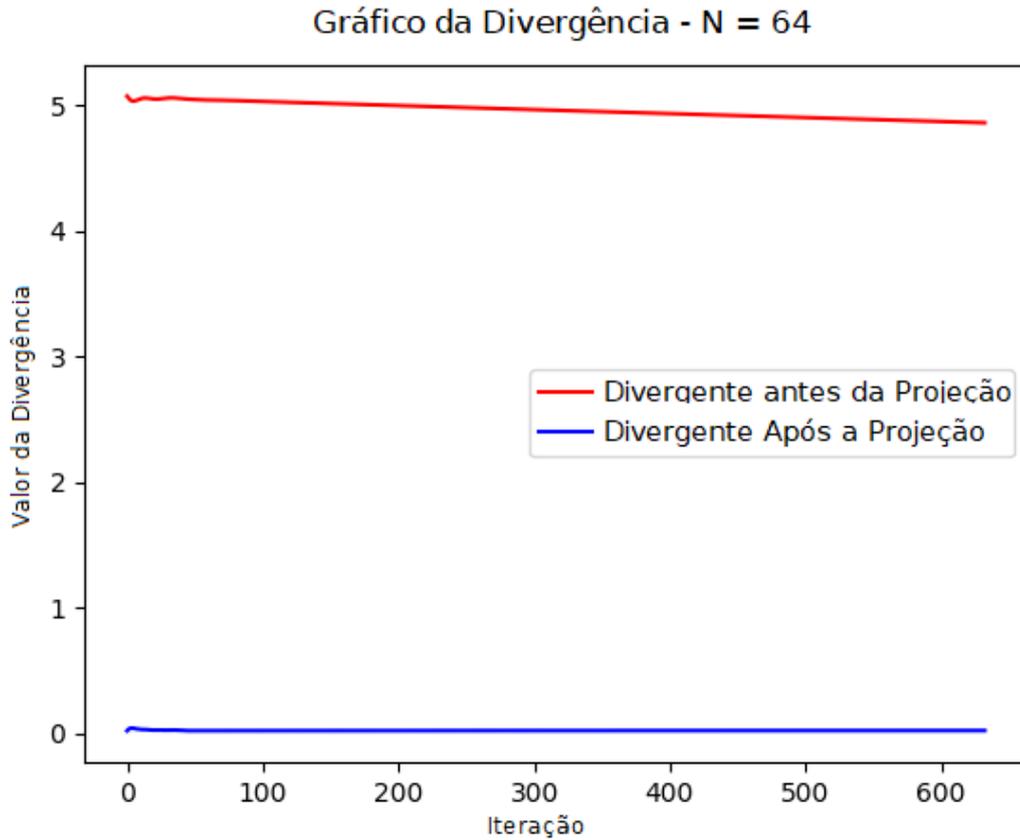


Figura 4.6: Conservação de massa antes e depois da Projeção.

No estudo de convergência apresentado na Figura 4.4, observamos que a ordem apresentada pelo método tende a 1 no caso da utilização de $\Delta t = \Delta h$, apesar da utilização do ADI, que é um método de ordem quadrática. Isso ocorre devido à presença da não-linearidade no problema de Navier-Stokes, que impacta diretamente a taxa de convergência. Embora métodos como o de Newton, que tratam explicitamente a não linearidade, possam potencialmente melhorar essas taxas, não exploramos essa abordagem aqui. Assim, optamos por focar nos resultados obtidos, destacando que a taxa de convergência se aproximou de 2 ao utilizarmos $\Delta t = \Delta h^2$ e utilizando Gauss-Seidel para a

solução da Pressão. O desempenho do algoritmo permanece com complexidade linear, em contraste com métodos clássicos baseados em eliminação de matrizes, como Cholesky ou Decomposição LU, que possuem complexidade cúbica (BRIDSON, 2015). Além disso, analisando os resultados da Figura 4.6, concluímos que o método se mostrou conservativo. Destacamos que, à medida que a solução tende ao regime estacionário, quando $t \rightarrow \infty$, esses aspectos técnicos tal como a estratégia de aproximação no tempo, escolha de Δt ou a linearização do método, tornam-se irrelevantes para casos estacionário, como veremos na próxima seção.

4.2 Estudo de Convergência: Caso Estacionário

O Fluxo de Kovasznay (*Kovasznay Flow*) é uma solução analítica estacionária para as equações de Navier-Stokes que descreve o comportamento de um fluxo laminar incompressível em uma grade bidimensional que se estende na direção Y. Proposto originalmente por Kovasznay (1948), esse fluxo é um caso específico que modela a formação de vórtices periódicos e a separação do fluxo de fluido em um regime laminar. A solução é particularmente útil para a validação de métodos numéricos e códigos computacionais destinados à simulação de escoamentos viscosos incompressíveis e estacionários.

A configuração do Fluxo de Kovasznay consiste em um fluxo bidimensional que exhibe uma estrutura periódica na direção transversal ao fluxo principal, caracterizada por perturbações no campo de velocidade. A solução analítica é obtida ao se assumir um perfil de velocidade específico que satisfaz as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade para um fluido incompressível. Essa solução é expressa em termos de funções exponenciais e trigonométricas, que descrevem a variação espacial das componentes de velocidade e pressão. A solução exata é dada por (KOVASZNAY, 1948), sob um domínio

de $[-0.5, 1.5] \times [-0.5, 1.5]$.

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - \exp(\delta x) \cos(2\pi y), \\
 v &= \frac{\delta}{2\pi} \exp(\delta x) \sin(2\pi y), \\
 p &= \frac{1}{2} \exp(2\delta x), \\
 \text{tal que } \delta &= \frac{Re}{2} - \sqrt{\frac{Re^2}{4} + 4\pi^2}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como exemplo, o campo de velocidade e a magnitude da solução (4.3) é apresentado na Figura 4.7.

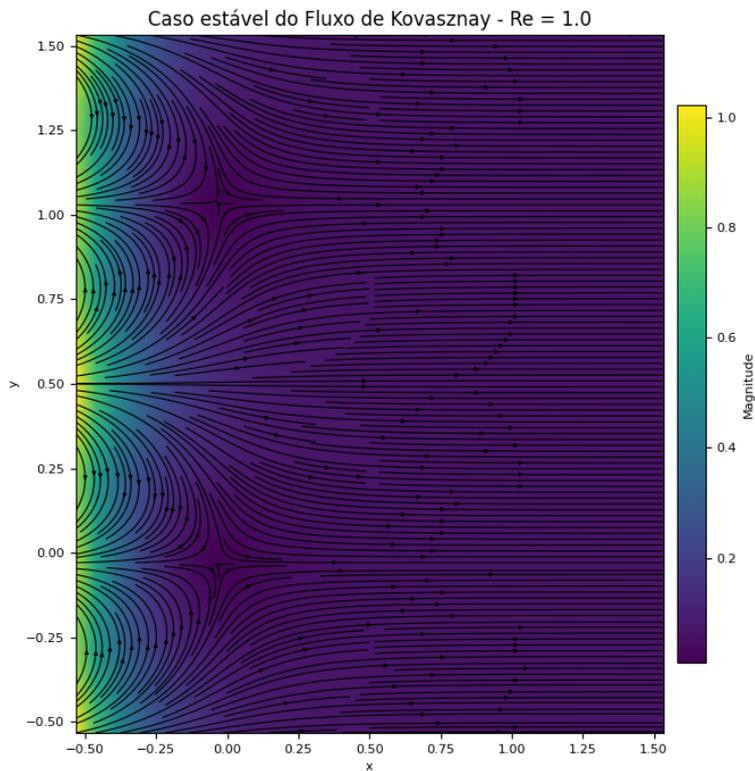


Figura 4.7: Solução exata do Campo de Velocidade de Kovaszny.

O estudo de convergência da velocidade foi conduzido com o objetivo de demonstrar que a ordem de convergência observada no regime transiente para diferentes escolhas de Δt , como evidenciado no problema de Taylor-Green, torna-se irrelevante quando o foco do estudo é o regime estacionário. Isso se deve ao fato de que, no estado esta-

cionário, o comportamento assintótico da solução é dominado pelas características do esquema numérico em sua forma estática, enquanto os efeitos transientes perdem sua influência. Para verificar essa hipótese, realizou-se uma análise de convergência da solução numérica da velocidade, adotando uma abordagem semelhante ao experimento desenvolvido na seção anterior. O estudo considerou diferentes resoluções da grade espacial, com o número de pontos variando em $N \in [16, 32, 64, 128]$, a fim de avaliar o impacto do refinamento da grade sobre o erro da solução. O critério de parada foi definido na norma do máximo como a diferença entre duas iterações transientes consecutivas inferior a 10^{-12} , como segue em (4.4). Utilizando o logaritmo na base dois para ambos os eixos, obtemos na figura 4.8 o estudo realizado.

$$\max(|\mathbf{u}_{ij}^n - \mathbf{u}_{ij}^{n+1}|) < 10^{-12} \quad \text{para } i, j \in [0, N]. \quad (4.4)$$

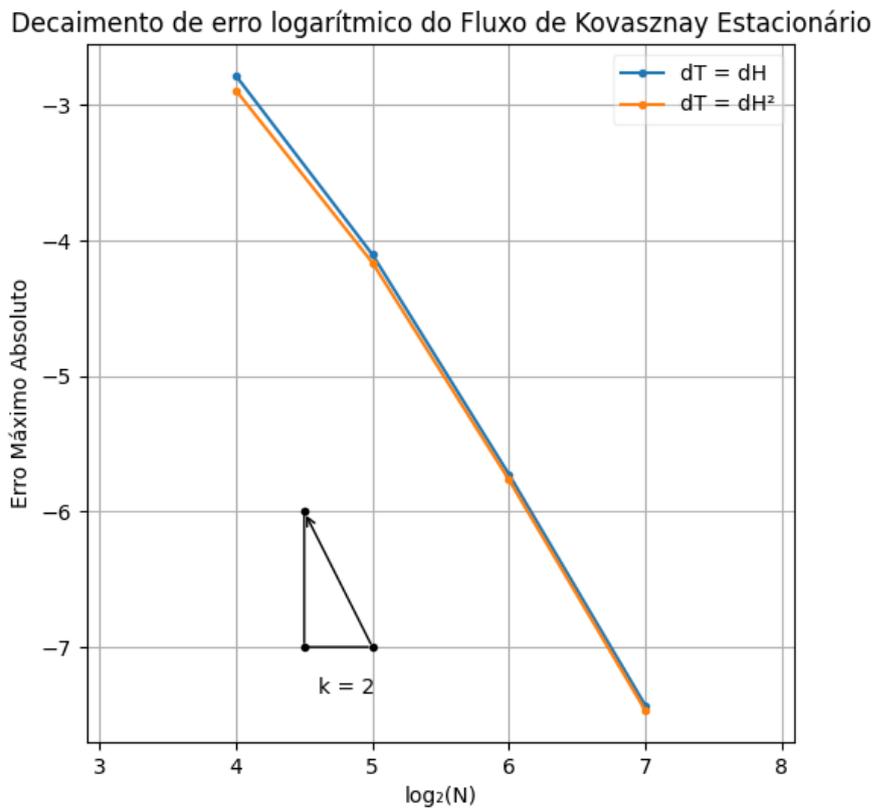


Figura 4.8: Estudo de convergência para $R_e = 40.0$.

Podemos perceber que, para ambos os valores de Δt , a ordem de convergência no caso estacionário permanece quadrática, o que está consoante a expectativa teórica para o método utilizado. Isso indica que o esquema numérico mantém sua precisão independentemente da escolha do passo de tempo, desde que o regime estacionário seja alcançado.

4.3 Problema da Cavidade (*lid-driven cavity flow*)

O problema da cavidade, conhecido na literatura como *lid-driven cavity flow* é um experimento modelo utilizado muitas vezes para validar resultados numéricos (GHIA; GHIA; SHIN, 1982), com algumas aplicações reais tais como o estudo de formações de aneurismas cerebrais com uso de *stents* (BOUILLOT et al., 2014).

O problema consiste em uma cavidade quadrada aberta com as paredes internas sólidas. Uma velocidade cisalhante é aplicada na parte superior, induzindo a formação de um vórtice interno na cavidade, com vórtices secundários se formando nos cantos caso o número de Reynolds seja alto o suficiente. O domínio de simulação é um cubo de dimensões unitárias, com condições de Dirichlet para a velocidade e Neumann Homogêneas para a pressão. Um esquema gráfico com esses detalhes pode ser visto na Figura 4.9.

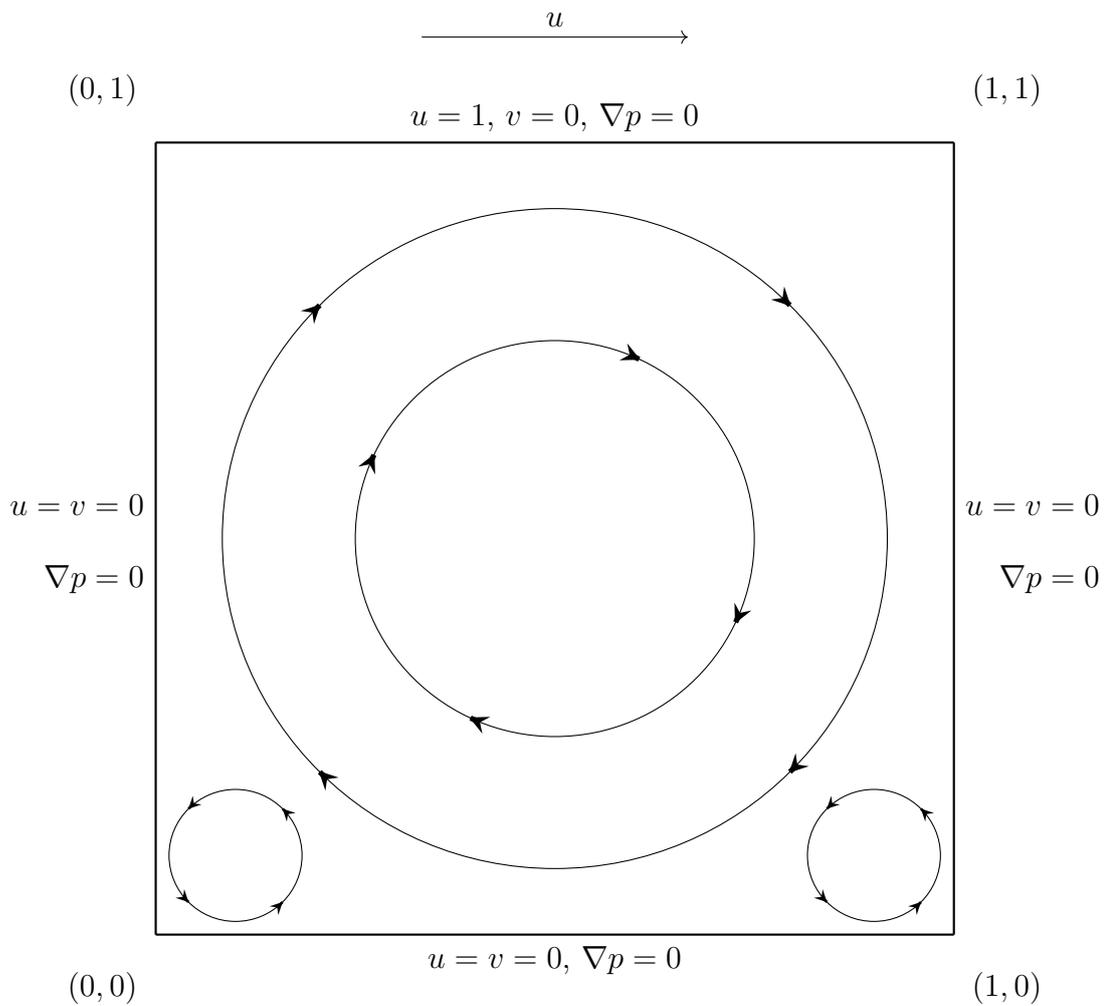


Figura 4.9: Modelo do Problema da Cavidade.

A Figura 4.10 apresenta uma simulação para o problema da cavidade para um $Re = 1000$ e $N = 16$ e $\Delta t = \Delta h$ em diferentes instantes de tempo até atingir o caso estacionário.

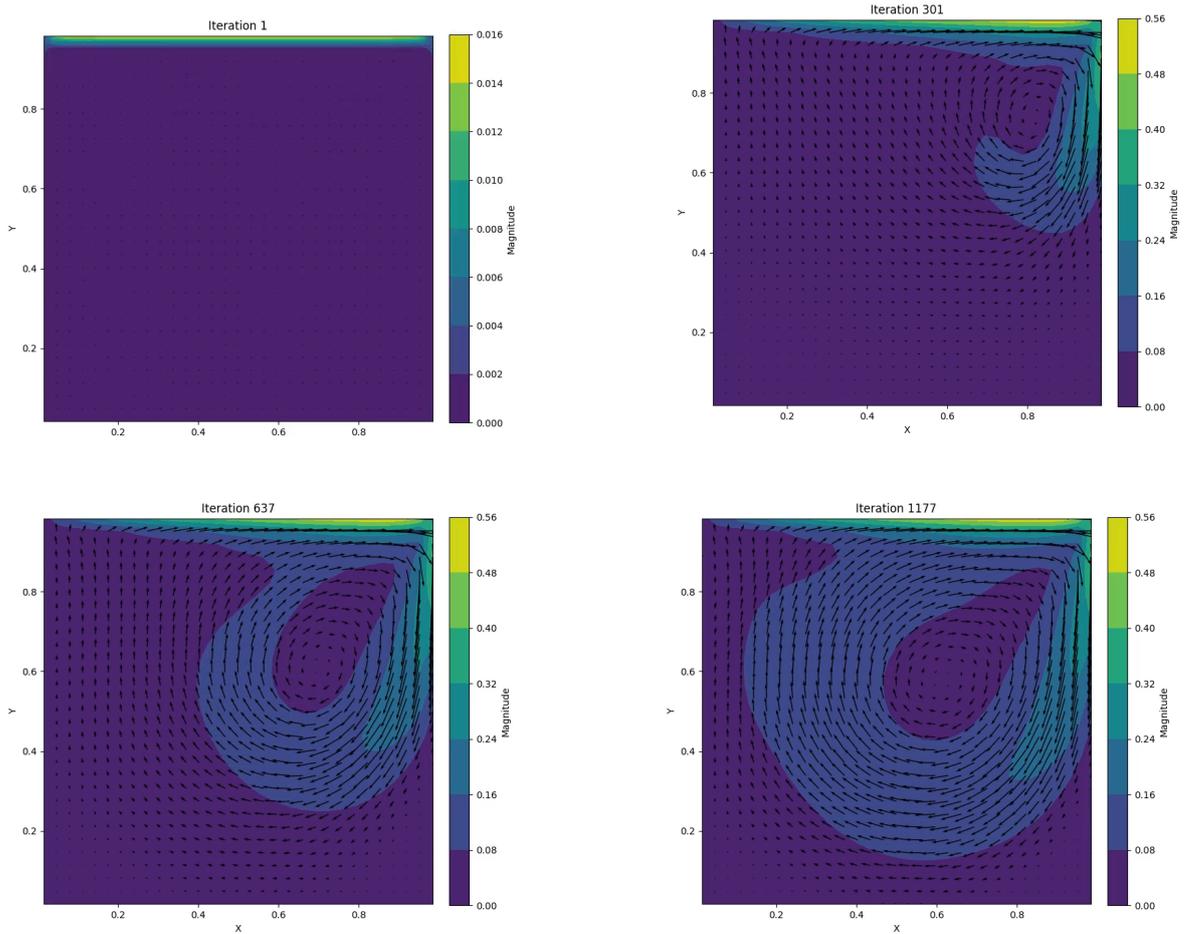


Figura 4.10: Problema da Cavidade em diferentes iterações.

No trabalho desenvolvido por Ghia, Ghia e Shin (1982), diversas simulações são realizadas para diferentes números de Reynolds, fixando o número de nós $N = 128$. Nestes experimentos, foram geradas diversas tabelas com dados para comparação e validação computacional. Neste contexto, tomamos no centro geométrico da cavidade, onde $x = 0.5$, o valor da componente u e realizamos comparações com os valores observado por Ghia, Ghia e Shin (1982) para $Re = 100$ e $Re = 1000$ variando a quantidade de nós N . Fixamos em todas as simulações $\Delta t = \Delta h$ e o critério de parada adotado definido em (4.4).

Apresentamos na Figura 4.11 os seguintes gráficos, com $Re = 100$ e $N = [16, 32, 64, 128]$ e de maneira similar para $Re = 1000$, obtivemos os valores apresentados na Figura 4.12. Assim como no experimento de Taylor-Green, os resultados obtidos demonstraram ser consistentes e apresentaram boa concordância com os dados reportados em artigos consolidados da literatura. A medida que se refina a grade, os resultados se aproximam do observado por Ghia, Ghia e Shin (1982). Esse alinhamento reforça a validade do modelo

desenvolvido para a análise de regimes laminares e moderados.

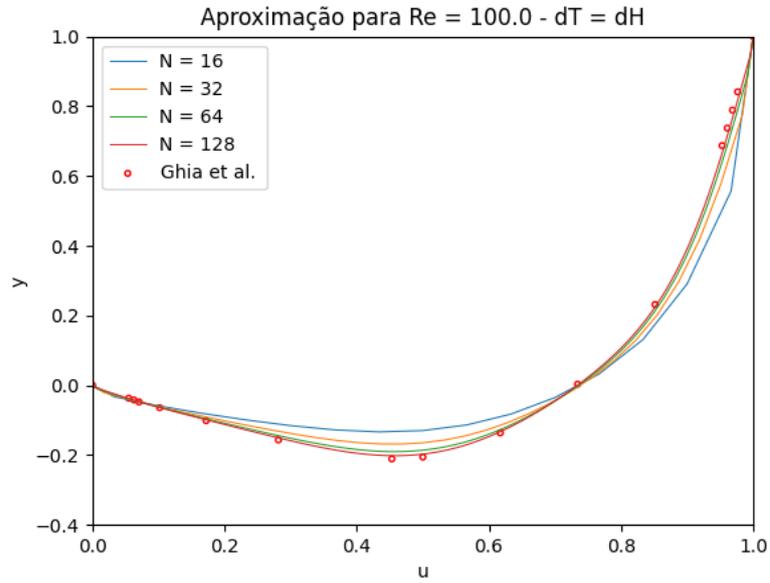


Figura 4.11: Perfil da componente u em $x = 0.5$ para diferentes N com $Re = 100$.

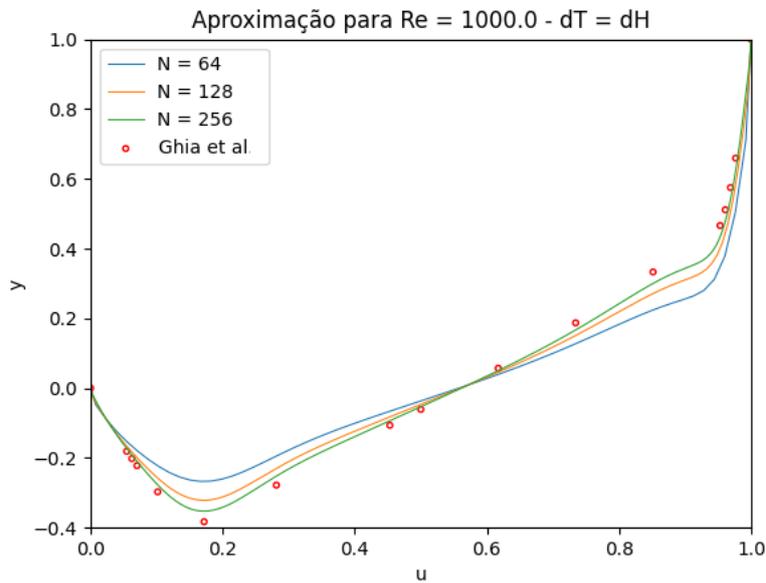


Figura 4.12: Perfil da componente u para diferentes N com $Re = 1000$.

Similarmente ao experimento de Taylor-Green desenvolvido na seção 4.1, realizamos um estudo do divergente relacionado a incompressibilidade antes e depois da projeção. Com $N = 32$ e $Re = 100$, obtivemos os valores representados nos gráficos presentes na Figura 4.13.

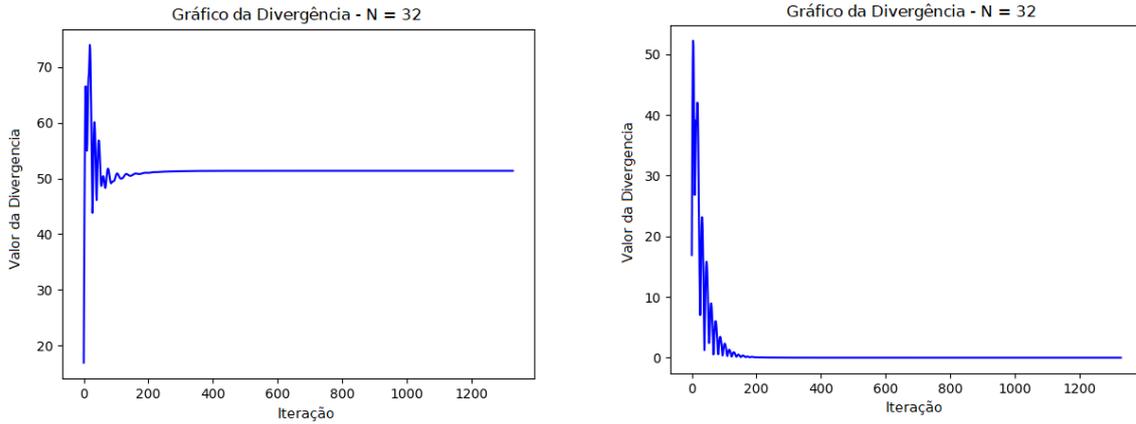


Figura 4.13: Valores do Divergente Total antes (à esquerda) e depois (à direita) da aplicação da Projeção da Pressão.

Podemos observar na Figura 4.13 que, durante as primeiras iterações, o divergente gradualmente se aproxima de zero. Esse comportamento contrasta com o observado na solução de Taylor-Green (Figura 4.6), onde o divergente já era nulo desde a primeira iteração. Essa diferença pode ser atribuída a diversos fatores, como a escolha do passo temporal e variações bruscas no campo de pressão. No caso da cavidade, a ausência de uma solução inicial para a pressão faz com que ela vá se ajustando progressivamente até atingir o valor esperado. Além disso, nas quinas da parte superior da cavidade, a solução está sujeita a instabilidades devido à mudança abrupta nas condições de contorno, que passam de velocidade unitária para zero, podendo comprometer a conservação de massa.

4.4 Problema do Escoamento Sobre Degrau

O experimento do degrau, denominado na literatura como *backward-facing step*, é um problema modelo amplamente estudado e com resultados experimentais realizados em laboratório, como os descritos por Armaly et al. (1983). Esse estudo é utilizado para validação de métodos numéricos (JOVIC; DRIVER, 1994) e possui diversas aplicações em campos da engenharia como a aerodinâmica por se tratar de um experimento que estuda a separação do regime do fluido bruscamente sobre uma descontinuidade geométrica (CHEN et al., 2018).

O domínio de simulação é tipicamente uma região retangular onde, na entrada,

o fluido é transportado por um canal estreito que em seguida se expande abruptamente, formando um degrau na parede inferior. Esse degrau provoca a formação de recirculações e zonas de separação atrás da descontinuidade, com características que dependem da velocidade do fluido e do número de Reynolds. Na entrada do canal, a condição de contorno é caracterizada por um perfil parabólico da velocidade com regime laminar, como previsto na Lei de Hagen-Poiseuille. Nas paredes superiores e inferiores, uma condição de não deslizamento “*no-slip*” é aplicada para emular o atrito sofrido do fluido sob as paredes do canal. Nessas condições, as velocidades u e v são nulas no sentido da normal. Na saída, adotamos uma condição de continuidade, onde o fim do domínio está a uma distância considerável da zona de interesse, de modo com que não a afete. Matematicamente, impomos uma condição de continuidade do domínio. Podemos visualizar graficamente na Figura 4.14 o experimento e os parâmetros como proposto por Armaly et al. (1983).

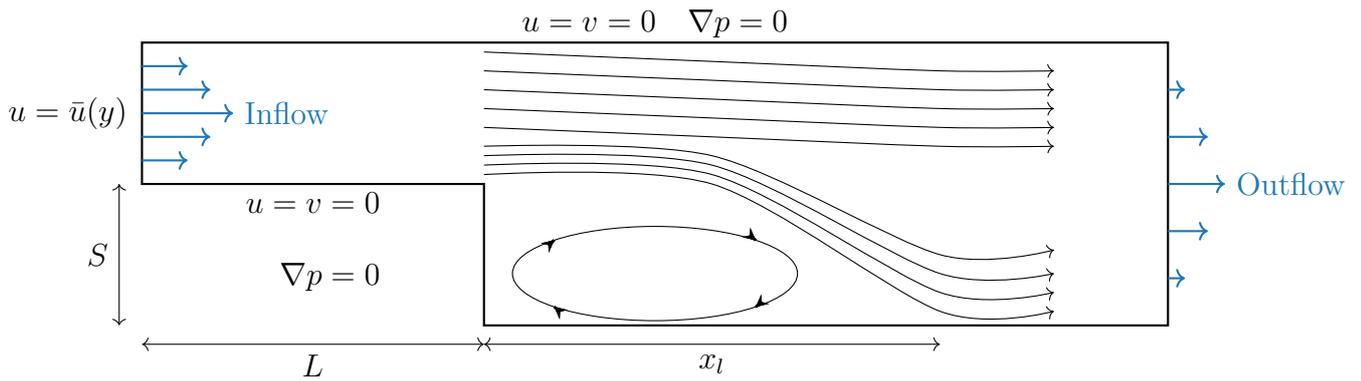


Figura 4.14: Esquema do Problema do Degrau.

Na Figura 4.14 temos os valores S e L , que dizem respeito à largura e altura, respectivamente, do degrau. No experimento realizado proposto por Armaly et al. (1983), a altura domínio de simulação é $\Omega_y = [0, 1]$ com o degrau tomando metade da altura. O domínio em X foi tomado como variável. Isso é feito a fim de evitar que as condições na região de saída influenciem a região de interesse em torno do degrau. Com Reynolds maiores, a zona de separação cresce, o que implica que a saída deve estar a uma distância X_f maior do degrau. A largura do degrau L é irrelevante ao experimento, portanto, a fixamos em 0.5 visando obter uma melhor visualização dos resultados. Os parâmetros

podem ser visualizados abaixo

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, X_f] \times [0, 1]; \\ S &= 0.5; \\ L &= 0.5.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Na entrada do domínio, o fluxo adota um perfil parabólico na componente u da velocidade, com sua componente vertical nula. Para isso, a condição de contorno imposta segue a função, como proposto por Armaly et al. (1983)

$$\bar{u}(y) = \begin{cases} -16 \left(y - \frac{3S}{2}\right)^2 + 1 & \text{para } y > 0.5 \\ 0 & \text{para } y \leq 0.5 \end{cases}.\tag{4.6}$$

Com a simulação, uma zona de separação é formada atrás do degrau, denotada por x_l . A medida começa a partir do início do degrau e termina assim que o fluido colide com a parede inferior. Esse valor é um dos critérios utilizados para a avaliação do resultado obtido. Sua medição é feita visualmente, analisando as linhas de fluxo do fluido contra uma grade geométrica. Foram feitos experimentos para diferentes valores de Reynolds, adotando o critério de parada (4.4), porém utilizando a tolerância 10^{-6} . Para o tamanho da grade, definimos o valor de $\Delta h = 1.0/N$, isotrópico em ambas as direções, sendo o número de células em cada direção definido como

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{x_f - x_i}{\Delta h}, \\ N_y &= \frac{y_f - y_i}{\Delta h}, \\ \Delta h &= \frac{1}{N}, \quad N \in [16, 32],\end{aligned}\tag{4.7}$$

onde x_f e y_f definem o valor final do domínio e x_i e y_i os valores iniciais. A simulação adquire fluxo ondulatório no momento da separação, que vai sendo atenuado conforme a passagem do tempo.

Neste contexto, realizamos simulações para $R_e \in [100, 1000]$, com $N \in [16, 32]$ e $\Delta t = \Delta h$. Na Figura 4.15 apresentamos a magnitude da velocidade e as linhas de corrente para $R_e = 100$, que apresenta um comportamento laminar com reduzida zona de recir-

culao no degra. Na Figura 4.16 exibimos a comparação do perfil da componente u da velocidade em diferentes cortes no eixo X comparado aos dados experimentais retirados de Armaly et al. (1983). Para essa comparação, os resultados numéricos foram dimensionalizados conforme os dados utilizados em Armaly et al. (1983), multiplicando o eixo X pela velocidade $u = 30$ e o eixo Y por 10. Os resultados mostram uma boa concordância com os dados experimentais, reproduzindo de forma satisfatória o comportamento do escoamento observado em laboratório.

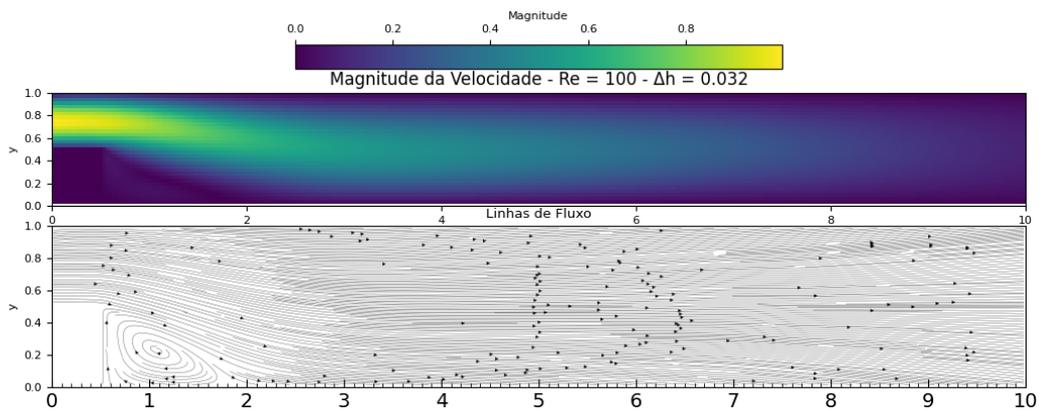


Figura 4.15: Campo da velocidade e linhas de corrente para $Re = 100$.

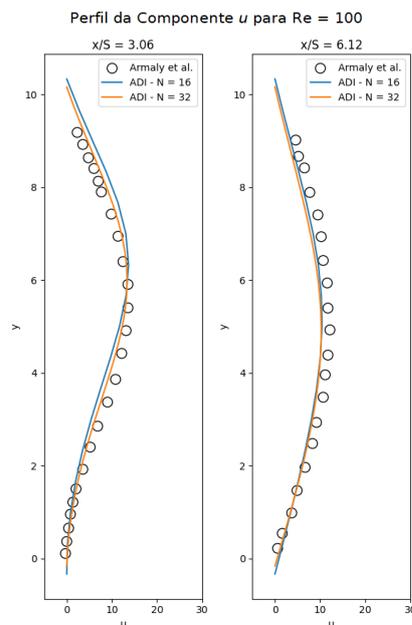


Figura 4.16: Perfil da velocidade para $Re = 100$.

Analogamente, para $Re = 389$, apresentamos na Figura 4.17 o caso estável da magnitude da velocidade com as linhas de fluxo. Em 4.18, expomos o perfil da componente u da velocidade. Similar ao experimento anterior, os resultados do perfil demonstram boa concordância com os de (ARMALY et al., 1983), com os valores de u seguindo bem próximo aos encontrados empiricamente.

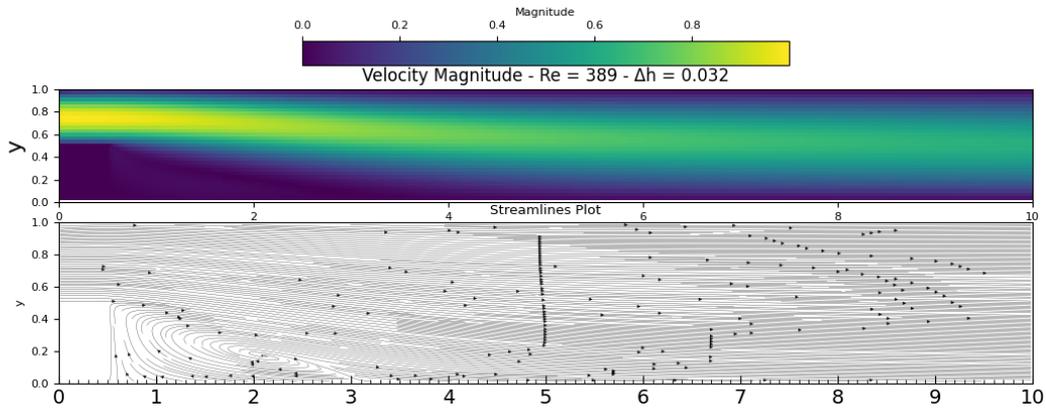


Figura 4.17: Caso estável para $Re = 389$.

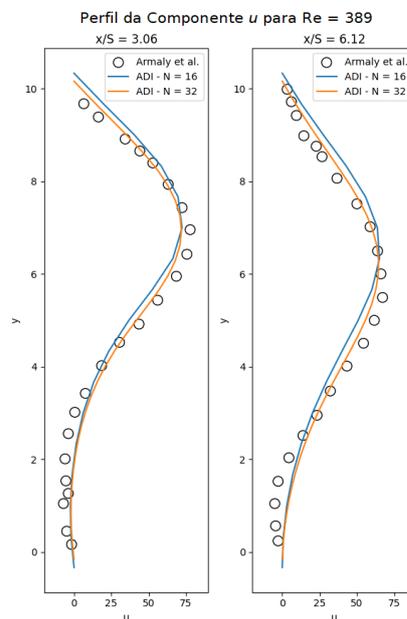


Figura 4.18: Perfil da velocidade para $Re = 389$.

A iteração final do campo de Pressão para $Re = 100$ também pode ser vista na Figura 4.19. Nela podemos confirmar que as zonas de baixa pressão se encontram ao final

do canal, o que é coerente com o modelo de Navier-Stokes, onde o fluxo do fluido é das zonas de alta pressão para as baixas.

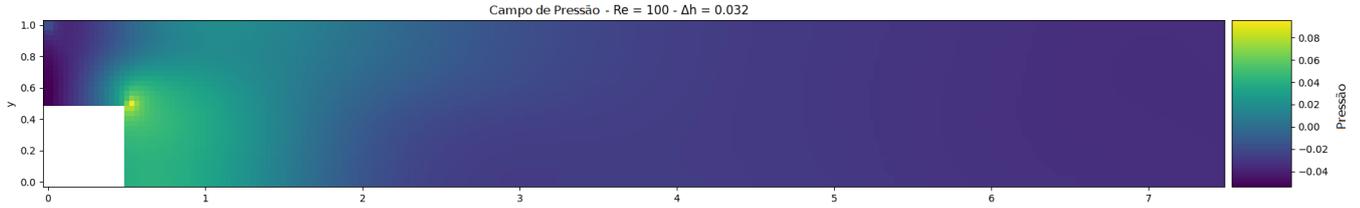


Figura 4.19: Campo de Pressão do caso estacionário para $Re = 100$.

Por fim, simulamos diversos valores afim de gerar uma comparação com os dados experimentais de Armaly et al. (1983) e os dados simulados de Labeur e Wells (2012) a respeito da zona de separação, definido como $x_L = \frac{x_L}{S}$. Estes resultados deram origem a Figura 4.20. A discordância dos resultados para $Re > 400$ é amplamente discutida nos trabalhos de Armaly et al. (1983) e Labeur e Wells (2012). Essa diferença ocorre devido ao fato de que os experimentos laboratoriais são conduzidos em sistemas tridimensionais, enquanto as simulações consideradas neste estudo são restritas a duas dimensões. Nos experimentos, à medida que o número de Reynolds ultrapassa o valor crítico, o fluxo do fluido exibe comportamentos intrinsecamente tridimensionais, como a formação de estruturas complexas de vórtices e instabilidades adicionais que não podem ser captadas por uma abordagem bidimensional.

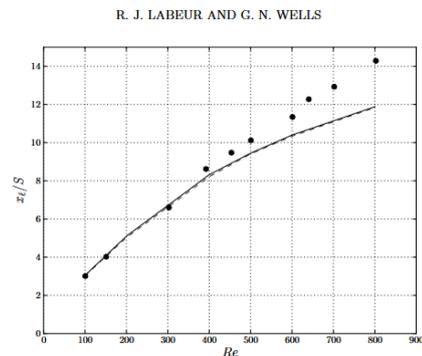
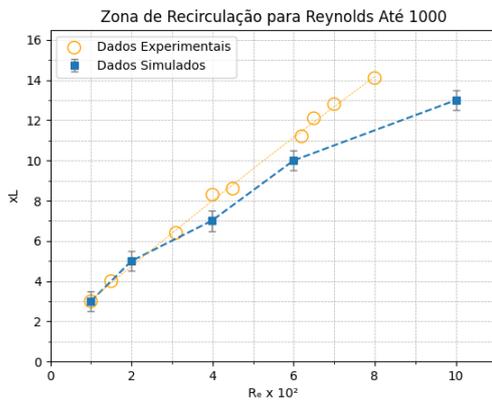


FIG. 7.8. Backward-facing step: comparison of measured (\bullet) and computed reattachment lengths for polynomial orders of $k = 1$ (solid) and $k = 2$ (dashed), experimental data from [28].

Figura 4.20: Comparação de x_L obtido numericamente com dados experimentais Armaly et al. (1983) (esquerda) resultados apresentados por Labeur e Wells (2012) (direita).

Adicionalmente, realizamos um estudo de desempenho computacional compa-

rando a estratégia de resolução serial demonstrada no algoritmo 1 com a estratégia em paralelo exposta no algoritmo 2. Neste estudo, medimos o desempenho computacional do algoritmo em sua forma paralelizada e sequencial, a fim de obter uma comparação do ganho de desempenho no experimento mais complexo estudado neste trabalho. Fixamos Reynolds em 100 e calculamos o tempo médio total para a resolução de cada iteração da velocidade. A máquina utilizada neste estudo possui uma CPU Ryzen 3 3100 com 3.9 Ghz, 32Gb de Memória RAM DDR4, uma GPU RTX 3060 12 Gb, SSD M.2 da marca Kingston de 500 Gb e com sistema operacional Windows 10. Para medir o tempo de execução da simulação paralela utilizando o Algoritmo 2, utilizamos o “*perf-counter*” (implementado na linguagem Python). A contagem é iniciada imediatamente antes da chamada paralela das funções *SolveXADI* e *SolveYADI* e encerrada logo antes da resolução da pressão em *SolvePoisson()*, garantindo que ambos os processos estejam concluídos. Dessa forma, a medição considera tanto o custo da paralelização quanto a sobrecarga associada à sua gestão. Como resultado geramos a Figura 4.21, em que temos o tempo médio da iteração da velocidade em função do número de células N^2 . A diferença em porcentagem demonstra o acréscimo do tempo utilizado em relação à forma paralelizada.

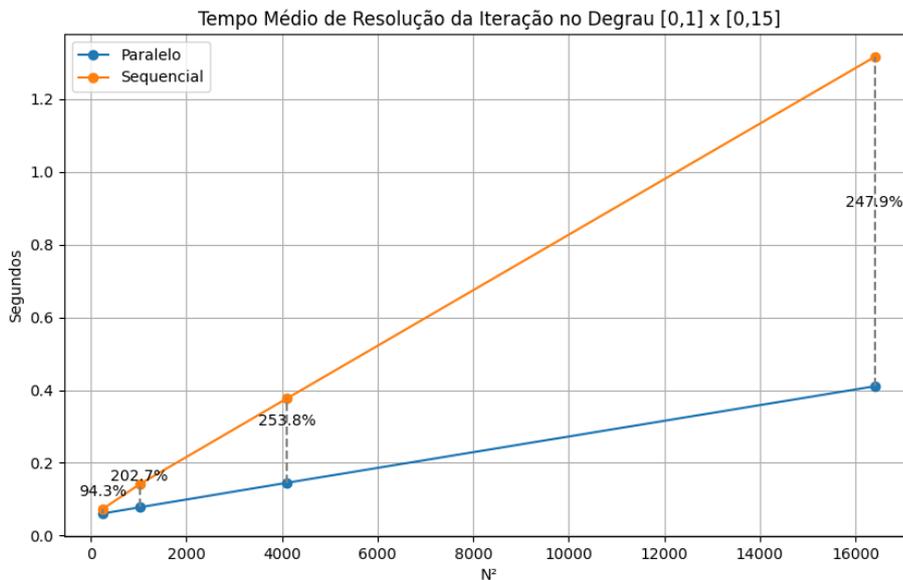


Figura 4.21: Tempo médio de resolução para diferentes refinamentos empregando $R_e = 100$.

Podemos perceber que houve um ganho notável na paralelização do processo. Esse ganho é mais evidente para valores maiores de N , pois o custo associado ao *overhead* da paralelização, que inclui a criação e gerenciamento de processos paralelos, permanece constante independentemente do tamanho do problema. Para valores menores de N , o *overhead* pode representar uma fração significativa do tempo total de execução, reduzindo a eficiência da paralelização. No entanto, à medida que N aumenta, o tempo gasto com o *overhead* torna-se proporcionalmente menor em relação ao tempo total de processamento, permitindo que o benefício da paralelização se torne mais pronunciado. Além disso, a reta obtida pelo aumento do tamanho da entrada do algoritmo (a quantidade de células) demonstra uma complexidade linear no processo de resolução. Isso é condizente com o esperado teórico, dado que o Algoritmo de Thomas, utilizado para a solução do ADI, possui complexidade linear.

5 Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesse trabalho estudamos uma estratégia numérica que combina um esquema ADI com a Projeção da Pressão para resolver as equações de Navier-Stokes. Caminhamos por todo o desenvolvimento matemático e teórico do modelo de Navier-Stokes, desde a dedução das equações a partir da Segunda Lei de Newton até o esquema de segregação das variáveis da pressão e velocidade, que, sendo amparada pela projeção da pressão, nos permite impor a restrição de incompressibilidade. Em seguida, apresentamos brevemente a fundamentação teórica acerca de Métodos de Diferenças Finitas, o esquema ADI proposto por Peaceman e Rachford Jr (1955) e a Projeção da Pressão, proposto por Chorin (1967). Tendo a base teórica, aplicamos a discretização proposta nas equações de Navier-Stokes e propomos um algoritmo sequencial e paralelo para resolvê-las. Assim, implementamos o método e o validamos por meio da comparação com diversos experimentos consolidados da literatura, além da realização de estudos de convergência com soluções conhecidas.

Para estudos de convergência, realizamos dois testes distintos, um para o caso transiente e outro para o caso estacionário. No caso transiente, utilizamos a solução de Taylor e Green (1937). Foi possível observar que a taxa de convergência 2 foi somente atingida com a utilização de $\Delta t = \Delta h^2$ no caso transiente. Entretanto, utilizando o estudo de convergência estacionário com a solução de Kovasznay (1948), pudemos demonstrar que no caso estacionário, a taxa de convergência é quadrática independente da escolha de Δt . Em estudos de caso estacionário, fatores como a linearização do termo convectivo e a escolha do tamanho do passo temporal são irrelevantes, uma vez que o comportamento da solução numérica é dominado pelas características do método numérico em sua forma estática.

Por fim, demonstramos a efetividade do método em dois estudos de caso, que foi resolvido de forma iterativa até atingir caso estacionário, comumente utilizados na literatura para validação de metodologias numéricas para o problema de Navier-Stokes. O problema da cavidade, em que utilizamos o trabalho de Ghia, Ghia e Shin (1982) como base, e o problema do escoamento sobre degrau, utilizando os dados experimentais

de Armaly et al. (1983). Em ambas as simulações, os resultados obtidos são robustos e apresentam boa concordância com os expostos na literatura para $Re \leq 1000$, onde o regime do fluxo se mantém laminar. Além disso, demonstramos que a restrição de conservação de massa foi adequadamente atendida por meio da aplicação do Método de Projeção, e os resultados obtidos apresentaram concordância satisfatória com os dados experimentais disponíveis. No experimento do Degrau, foi realizada uma comparação de performance entre o algoritmo do caso sequencial (1) e do algoritmo do caso paralelo (2). Foi observado que há um ganho considerável de desempenho, chegando à cerca de 250% para grandes refinamentos da grade.

Em regimes de Reynolds elevados, o comportamento do fluxo é caracterizado pela presença de estruturas instáveis e transição para turbulência, exigindo esquemas mais robustos e adaptativos para garantir precisão e eficiência computacional. A falta de mecanismos de estabilização, como esquemas *upwind*, modelos de turbulência e uma grade anisotrópica adaptativa limitam a capacidade de nosso modelo de lidar com essas dinâmicas complexas. Por isso, simulações para valores elevados do número Reynolds relacionados a regimes turbulentos não foram realizados.

Para trabalhos futuros, considera-se fortemente a implementação do método em três dimensões, uma vez que essa extensão é uma evolução natural da metodologia numérica estudada. Nesse contexto, o ganho da paralelização seria ainda mais relevante, dado que seriam três componentes independentes da velocidade a serem solucionadas em paralelo. Em três dimensões a utilização das variáveis primitivas das equações de Navier-Stokes torna-se essencial, dado que não há uma função corrente única em dimensões superiores, o que se alinha de forma vantajosa com a abordagem proposta. Adicionalmente, há a possibilidade de incorporar equações de modelos de turbulência como esquemas RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*), visando ampliar sua aplicabilidade e precisão em cenários complexos. Além disso, há um interesse na investigação do paradigma semi-lagrangiano como maneira de representar quantias discretas de fluidos e adaptação do modelo para aplicações gráficas.

Bibliografia

ARMALY, B. F.; DURST, F.; PEREIRA, J.; SCHÖNUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 127, p. 473–496, 1983.

BOUILLOT, P.; BRINA, O.; OUARED, R.; LOVBLAD, K.-O.; FARHAT, M.; PEREIRA, V. M. Particle imaging velocimetry evaluation of intracranial stents in sidewall aneurysm: hemodynamic transition related to the stent design. *PLoS One*, Public Library of Science San Francisco, USA, v. 9, n. 12, p. e113762, 2014.

BRIDSON, R. *Fluid simulation for computer graphics*. [S.l.]: AK Peters/CRC Press, 2015.

CHEN, L.; ASAI, K.; NONOMURA, T.; XI, G.; LIU, T. A review of backward-facing step (bfs) flow mechanisms, heat transfer and control. *Thermal Science and Engineering Progress*, Elsevier, v. 6, p. 194–216, 2018.

CHORIN, A. J. The numerical solution of the navier-stokes equations for an incompressible fluid. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 73, n. 6, p. 928–931, 1967.

CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E.; MARSDEN, J. E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3.

DOUGLAS, J. Alternating direction methods for three space variables. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 4, p. 41–63, 1962.

ERTURK, E. Numerical solutions of 2-d steady incompressible flow over a backward-facing step, part i: High reynolds number solutions. *Computers & Fluids*, v. 37, n. 6, p. 633–655, 2008. ISSN 0045-7930.

ERTURK, E. Discussions on driven cavity flow. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 60, n. 3, p. 275–294, 2009.

ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers. *International journal for Numerical Methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 48, n. 7, p. 747–774, 2005.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational methods for fluid dynamics*. [S.l.]: Springer, 2002.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Fisica 3*. [S.l.]: LTC, 1996. v. 3.

HARLOW, F. H. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. *Methods Comput. Phys.*, v. 3, p. 319–343, 1964.

HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. et al. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of fluids*, v. 8, n. 12, p. 2182, 1965.

- JOHN, V. et al. *Finite element methods for incompressible flow problems*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 51.
- JOST, J.; LI-JOST, X. *Calculus of variations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. v. 64.
- JOVIC, S.; DRIVER, D. M. *Backward-facing step measurements at low Reynolds number, Re (sub h) = 5000*. [S.l.], 1994.
- KOVASZNAY, L. I. G. Laminar flow behind a two-dimensional grid. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1948. v. 44, n. 1, p. 58–62.
- LABEUR, R. J.; WELLS, G. N. Energy stable and momentum conserving hybrid finite element method for the incompressible navier–stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 34, n. 2, p. A889–A913, 2012.
- LEVEQUE, R. J. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. [S.l.]: SIAM, 2007.
- LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, vol. 82, Dec. 1977, p. 1013–1024., v. 82, p. 1013–1024, 1977.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M.; MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. *The finite volume method*. [S.l.]: Springer, 2016.
- ORSZAG, S. A. Numerical simulation of the taylor-green vortex. In: SPRINGER. *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering Part 2: International Symposium, Versailles, December 17–21, 1973*. [S.l.], 1974. p. 50–64.
- PEACEMAN, D. W.; RACHFORD JR, H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*, SIAM, v. 3, n. 1, p. 28–41, 1955.
- RINCON, M. A.; ISHII, L. Introducao ao metodo de elementos finitos–computação e análise em equações diferenciais parciais. *Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro*, 2013.
- ROYCHOWDHURY, D. *Computational fluid dynamics for incompressible flows*. [S.l.]: CRC Press, 2020.
- SANCHEZ-GONZALEZ, A.; GODWIN, J.; PFAFF, T.; YING, R.; LESKOVEC, J.; BATTAGLIA, P. Learning to simulate complex physics with graph networks. In: PMLR. *International conference on machine learning*. [S.l.], 2020. p. 8459–8468.
- STAM, J. Real-time fluid dynamics for games. In: *Proceedings of the game developer conference*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 18, n. 11.
- TAYLOR, G. I.; GREEN, A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 158, n. 895, p. 499–521, 1937.
- THOMAS, L. H. Elliptic problems in linear difference equations over a network. *Watson Sci. Comput. Lab. Rept., Columbia University, New York*, v. 1, p. 71, 1949.

YE, T.; PAN, D.; HUANG, C.; LIU, M. Smoothed particle hydrodynamics (sph) for complex fluid flows: Recent developments in methodology and applications. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 31, n. 1, 2019.