



Métodos de diferenças finitas ADI para a resolução de escoamentos de Navier-Stokes induzidos por efeitos térmicos e magnéticos

José Santos Sá Carvalho

JUIZ DE FORA
AGOSTO, 2022

Métodos de diferenças finitas ADI para a resolução de escoamentos de Navier-Stokes induzidos por efeitos térmicos e magnéticos

JOSÉ SANTOS SÁ CARVALHO

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação
Orientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

JUIZ DE FORA
AGOSTO, 2022

MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS ADI PARA A RESOLUÇÃO
DE ESCOAMENTOS DE NAVIER-STOKES INDUZIDOS POR
EFEITOS TÉRMICOS E MAGNÉTICOS

José Santos Sá Carvalho

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS
EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTE-
GRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Iury Higor Aguiar da Igreja
Doutor em Modelagem Computacional

José Jerônimo Camata
Doutor em Engenharia Civil

Bernardo Martins Rocha
Doutor em Modelagem Computacional

JUIZ DE FORA
3 DE AGOSTO, 2022

Resumo

Neste trabalho o método de diferenças finitas implícito de direções alternadas (*Alternating Direction Implicit* - ADI) é aplicado para a resolução de escoamentos incompressíveis em cavidades bidimensionais induzidos por efeitos cisalhantes, térmicos e magnéticos. Neste contexto, são estudados escoamentos regidos pelas equações de Navier-Stokes, incluindo efeitos de convecção natural devido a diferença de temperatura (representados pela aproximação de Boussinesq para a conservação de energia), e magnéticos (representados pelas equações de Maxwell). Buscando contornar as não linearidades inerentes desses problemas e reduzir o custo computacional de resolução, as equações diferenciais parciais governantes desses fenômenos são reescritas nas variáveis função corrente e vorticidade, e discretizadas pelo método ADI, que tem a vantagem de requerer apenas a solução de sistemas tridimensionais. Para tanto, são incluídos termos de derivada no tempo às equações, gerando um problema pseudo-transiente. Esta abordagem dá origem a um algoritmo sequencial que permite resolver as equações de Navier-Stokes, Boussinesq e Maxwell de forma escalonada. Este algoritmo se repete até que o critério de parada relacionado ao valor máximo absoluto referente aos resíduos das equações governantes seja atingido, indicando proximidade da solução ao estado estacionário. Esta abordagem é aplicada à resolução do problema da cavidade cuja hidrodinâmica leva em consideração, além dos efeitos de cisalhamento, a temperatura e o magnetismo. Os resultados numéricos obtidos são validados a partir de extensivas comparações com diversos *benchmarks* da literatura, demonstrando a estabilidade e precisão da metodologia estudada.

Palavras-chave: ADI, diferenças finitas, Navier-Stokes, Boussinesq, Magnetohidrodinâmica.

Abstract

In this monograph, the finite difference alternated directions implicit (ADI) method is applied to incompressible fluid flows in bidimensional cavities, which are produced by shearing, thermal, and magnetic effects. In this context, we study fluid flows governed by the Navier-Stokes equations, including natural convection effects due to a temperature difference (represented by the Boussinesq approximation to the conservation of energy), and magnetic effects (represented by Maxwell's equations). Looking to circumvent the non-linearities inherent to these problems and reduce the computation cost, we rewrite the partial differential equations that govern these phenomena in terms of the stream function and vorticity, and discretize them via the ADI method, which has the advantage of requiring only the solution to tridiagonal systems. This approach gives origin to a sequential algorithm to solve the Navier-Stokes, Boussinesq, and Maxwell equations in separate steps in time. This algorithm is iterated until the stopping criterion related to the maximum absolute value of the residues of the governing equations is achieved, indicating proximity to the stationary state. This approach is applied to solving the cavity flow problem whose hydrodynamics includes not only shearing effects, but also temperature and magnetism. The numerical results obtained are extensively validated through comparisons to several benchmarks in the relevant literature, showing the stability and precision of the studied approach.

Keywords: ADI, finite differences, Navier-Stokes, Boussinesq, Magnetohydrodynamics.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Daniel e Marcela, pelo eterno apoio. À minha irmã Carla pelo seu senso de humor, e a minha avó Maria Cristina pelo seu amor.

Agradeço ao meu orientador Iury Igreja por ter me guiado tão prontamente durante o TCC, e ao corpo docente do DCC-UFJF por ter me aguentado pelos últimos 6 – longos – anos.

*Eu não prefiro nada, a não ser que seja
verdadeiro.*

– Sócrates

Conteúdo

Lista de Figuras	7
Lista de Tabelas	8
Lista de Abreviações	9
1 Introdução	10
2 Equações Governantes	15
2.1 Navier-Stokes	15
2.2 Escoamento por convecção natural	19
2.3 Convecção natural induzida por um campo magnético	21
3 Abordagem Numérica	25
3.1 Discretização das equações de Navier-Stokes	25
3.2 Discretização do problema da convecção natural	30
3.3 Discretização do problema da convecção natural induzida por efeitos magnéticos	34
4 Resultados Numéricos	38
4.1 <i>Lid-driven cavity flow</i>	38
4.2 Convecção Natural	46
4.3 Convecção natural induzida por efeitos magnéticos	52
5 Conclusões e Trabalhos Futuros	59
A Tabelas <i>lid-driven cavity flow</i>	61
Bibliografia	66

Lista de Figuras

1.1	Fluxo de fluido em aneurismas intracraniais, com diferentes <i>stents</i> (BOUILLOT et al., 2014).	11
2.1	Condições de contorno que provocam o escoamento de um fluido em uma cavidade quadrada com a tampa aberta. Retirada de Türk (2014).	19
2.2	Condições de contorno para o escoamento de um fluido em uma cavidade quadrada $[0, 1] \times [0, 1]$ com diferencial de temperatura entre as paredes. Figura retirada de Türk (2014).	22
2.3	Condições de contorno para o escoamento de um fluido eletrocondutor em uma cavidade quadrada, regido pelas equações de Navier-Stokes, Maxwell, e Boussinesq, e exposto a um campo magnético $\mathbf{B}$. Retirada de Türk (2014).	23
4.1	Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 100$	39
4.2	Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 400$ (cima), 1000 (meio), e 3200 (baixo).	40
4.3	Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 5000$	41
4.4	Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 7500$ e $Re = 10000$. Não foi obtida convergência para $Nel = 128$ elementos.	41
4.5	linhas de contorno da função corrente (esquerda) e vorticidade (direita) adotando 256×256 elementos.	43
4.6	linhas de contorno da função corrente (esquerda) e vorticidade (direita) adotando 256×256 elementos.	44
4.7	linhas de contorno da função corrente (esquerda) e vorticidade (direita) adotando 256×256 elementos.	45
4.8	Linhas de contorno da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita) para valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).	51
4.9	Contornos da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita), para $Ha = 10$, e valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).	53
4.10	Contornos da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita), para $Ha = 50$, e valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).	55
4.11	Contornos da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita), para $Ha = 100$, e valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).	56
4.12	Valores da velocidade (esquerda) e temperatura (direita), para $x = 0.25, 0.5, 0.75$. Aqui fixamos $n = 0.5$, $Ra = 10^6$. Temos resultados para $Ha = 100$ (figuras superiores), $Ha = 50$ (meio) e $Ha = 0$, (figuras inferiores).	57

Lista de Tabelas

4.1	Número de iterações para todas as simulações executadas. Foi adotado o critério de parada 3.9, com $C = 10^{-6}$.	39
4.2	Valor máximo absoluto da função corrente, e valores correspondentes da vorticidade e das coordenadas x e y , para $Re = 1000$.	46
4.3	Valores dos parâmetros de relaxamento usados, conforme o feito por Costa e Igreja (2020).	48
4.4	Número de iterações para todas as simulações executadas. Foi adotado o critério de parada (3.27), com $C = 10^{-6}$. O valor base de Δt usado foi $h^2/$	48
4.5	Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^3$.	48
4.6	Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^4$.	49
4.7	Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^5$.	49
4.8	Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^6$.	50
4.9	Componente vertical máximo v da velocidade do fluido na linha horizontal $x = 0.5$.	50
4.10	Número de iterações para todas as simulações executadas. Foi adotado o critério de parada 3.40, com $C = 10^{-6}$.	52
A.1	Valores da componente u da velocidade ao longo da linha vertical passando pelo centro geométrico de gravidade ($x = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 128×128 elementos (ou 129×129 pontos), mesmo refinamento utilizado por Ghia et al.. Foram testados diferentes valores de Re .	62
A.2	Valores da componente v da velocidade ao longo da linha horizontal passando pelo centro geométrico de gravidade ($y = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 128×128 elementos (ou 129×129 pontos), mesmo refinamento utilizado por Ghia et al.. Foram testados diferentes valores de Re .	63
A.3	Valores da componente u da velocidade ao longo da linha vertical passando pelo centro geométrico de gravidade ($x = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 256×256 elementos (ou 257×257 pontos), e comparados com Ghia et al., que utilizaram malhas de 128×128 elementos. Foram testados diferentes valores de Re .	64
A.4	Valores da componente v da velocidade ao longo da linha horizontal passando pelo centro geométrico de gravidade ($y = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 256×256 elementos (ou 257×257 pontos), e comparados com Ghia et al., que utilizaram malhas de 128×128 elementos. Foram testados diferentes valores de Re .	65

Lista de Abreviações

DCC Departamento de Ciência da Computação

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

1 Introdução

A Mecânica dos Fluidos Computacional é uma área da ciência que abrange ferramentas da Matemática Aplicada e Engenharias para a simulação computacional de problemas relacionados ao escoamento de fluidos. Esses problemas surgem em diversas áreas, como aerodinâmica, engenharia de processos químicos, engenharia biomédica e de sistemas biológicos, engenharia oceânica, e modelagem de poluição atmosférica, entre outros (FERZIGER; PERIC, 2002; WENDT, 2009; TÜRK, 2014). As leis físicas que governam o escoamento de fluidos são modeladas matematicamente por equações diferenciais, muitas das quais não possuem solução analítica. Em especial, na base de quase todos problemas dessa área, estão as equações de Navier-Stokes, que governam o escoamento convectivo de fluidos Newtonianos e incompressíveis. Para resolvê-las computacionalmente, são comumente utilizados métodos numéricos que visam aproximar suas funções e derivadas através de algoritmos que podem ser implementados e executados em computadores.

Duas classes importantes de métodos numéricos para estes problemas são os métodos de volumes finitos (MVF) e de elementos finitos (MEF). As primeiras abordagens usando MVF foram propostas por Patankar e Spalding (1972) e Patankar (1980) na década de 1970-80. Por outro lado, usando MEF destacamos os trabalhos de Brooks e Hughes (1982) e Franca e Frey (1992) que propuseram métodos de elementos finitos estabilizados para as equações de Navier-Stokes.

Uma outra classe de métodos numéricos, mais antiga que as anteriores, são os métodos de diferenças finitas (MDF). Esses métodos aproximam as derivadas de funções por discretizações consistentes com expansões em séries de Taylor, truncadas em algum termo, do qual depende a precisão da solução. Nesta classe de métodos, existe um em particular chamado método implícito de direções alternadas (ADI - *Alternating Direction Implicit*), proposto por Peaceman e Rachford (1955). Este método objetiva resolver problemas transientes, em duas ou três dimensões, de forma implícita. Esta abordagem resolve separadamente cada direção do domínio em passos de tempo intermediários dando origem a matrizes tridiagonais, que podem ser resolvidas eficientemente pelo algoritmo

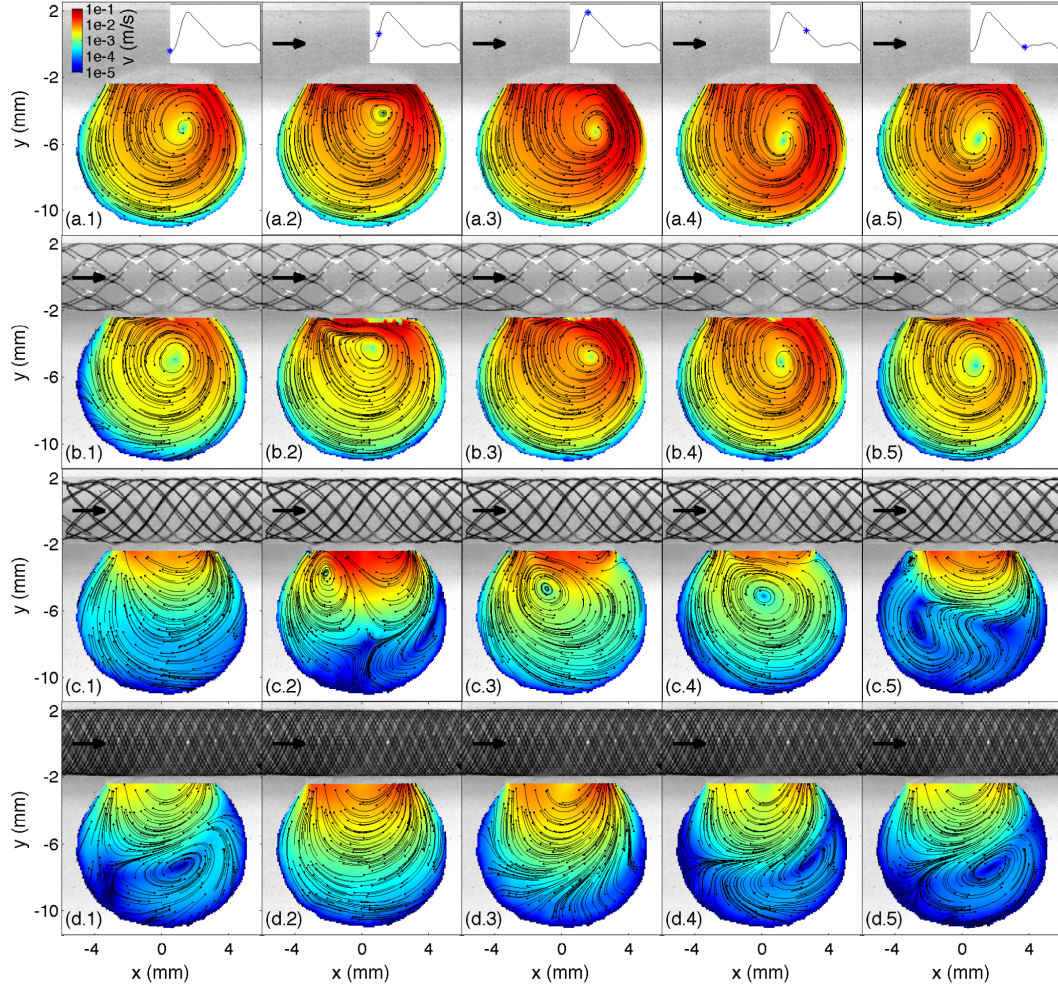


Figura 1.1: Fluxo de fluido em aneurismas intracraniais, com diferentes *stents* (BOUILLOT et al., 2014).

de Thomas. Além disso, quando aplicado a problemas bidimensionais, esta metodologia tem a vantagem de ser incondicionalmente estável, ou seja, a estabilidade é garantida sem impor restrições à escolha dos parâmetros de discretização do tempo e do espaço.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é estudar a aplicação do método ADI para a resolução de escoamentos incompressíveis incluindo efeitos de convecção natural, induzidos pelo calor ou por campos magnéticos. Primeiramente objetivamos resolver o problema do escoamento em cavidade induzido por uma velocidade imposta na parte superior da cavidade (*lid-driven cavity flow*), no qual o escoamento de um fluido incompressível acima de uma cavidade quadrada produz movimento no interior da cavidade devido a tensões cisalhantes causadas por efeitos viscosos. Este problema apresenta uma série de aplicações, como por exemplo o estudo de aneurismas, ilustrado na Figura 1.1 retirada de Bouillot et al. (2014). No entanto, é principalmente usado como um problema

de *benchmark* para a validação e teste da precisão de métodos numéricos (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005).

Diversos estudos foram propostos para o problema *lid-driven cavity flow* em duas dimensões, como Benjamin e Denny (1979), Ghia, Ghia e Shin (1982), Liao (1992), Barragy e Carey (1997), Erturk, Corke e Gökçöl (2005). Dentre eles, destacamos o trabalho de Benjamin e Denny (1979), que propôs um método ADI para resolver o problema de Navier-Stokes em uma cavidade quadrada, adotando um esquema de diferença central para discretização do termo convectivo, e computaram soluções empregando valores do número de Reynolds da ordem de 10000 (o número de Reynolds denotado por Re é um número adimensional que mede a relação entre efeitos convectivos e viscosos do escoamento). Posteriormente, usando uma metodologia numérica similar, Erturk, Corke e Gökçöl (2005) obtiveram soluções estáveis para elevados valores do número de Reynolds ($Re \leq 21000$) que foram comparadas a uma extensa literatura, como Ghia, Ghia e Shin (1982), Liao (1992), e Barragy e Carey (1997) e os resultados se mostraram bastante precisos.

Por outro lado, através da inclusão da equação de conservação de energia que modela a condução e convecção de calor no sistema, estudamos o problema da convecção natural de um fluido confinado em uma cavidade quadrada totalmente fechada, na qual uma diferença de temperatura nas paredes da cavidade produz mudanças na densidade do fluido e assim, dá origem a um escoamento devido ao empuxo (BUBNOVICH et al., 2002). Esse problema tem diversas aplicações, incluindo o isolamento térmico de reatores nucleares, a ventilação de ambientes, e a mudança nas condições ambientais de edifícios causadas por variações na temperatura atmosférica (DAVIS, 1983; BUBNOVICH et al., 2002).

O escoamento de fluidos pela convecção natural transiente em uma cavidade retangular foi estudado inicialmente por Wilkes e Churchill (1966) e Szekely e Todd (1971). Ambos os estudos usaram aproximações por diferenças finitas, incluindo o método ADI. Uma solução *benchmark* para o problema foi apresentada por Davis (1983), para valores do número de Rayleigh entre 10^3 e 10^6 . Mais recentemente, o problema foi estudado por Bubnovich et al. (2002), que computaram soluções por aproximações de diferenças finitas,

e Roy e Basak (2005), que utilizaram o método de elementos finitos.

Finalmente, simulamos o problema da convecção natural em uma cavidade quadrada fechada induzida por efeitos magnéticos. Neste problema, um campo magnético externo à cavidade, que está preenchida com um fluido eletrocondutor, induz o aquecimento da extremidade da cavidade dando origem a uma diferença de temperatura e consequentemente ao movimento do fluido devido ao empuxo.

O escoamento por convecção natural magnetohidrodinâmica (MHD - Magnetohydrodynamic) de fluidos eletrocondutores dentro de uma cavidade também é um problema extensamente estudado. Kakarantzas et al. (2009) analisaram o efeito de um campo magnético vertical no escoamento de um fluido contido em uma cavidade cilíndrica. Em cavidades retangulares, estudos incluem Garandet, Alboussiere e Moreau (1992) e Sarris et al. (2006). Mais recentemente, soluções por métodos de colocação espectral de Chebyshev foram estudadas por Türk (2014). No entanto, os autores desconhecem literatura que trate de escoamentos desse tipo, em cavidades quadradas, resolvidos pelo método ADI.

Para realizar o objetivo proposto de resolver os escoamentos induzidos por efeitos térmicos e eletromagnéticos usando o método ADI, supomos o escoamento de um fluido em uma cavidade quadrada bidimensional, e sendo u e v as componentes horizontal e vertical, respectivamente, do vetor velocidade $\mathbf{u}$, podemos reescrever as equações de Navier-Stokes em termos da função corrente ψ e da vorticidade ω , tais que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{e} \quad \omega = -\Delta \psi.$$

Deste modo, o modelo é resolvido em função dessas variáveis que são de interesse para se estudar o movimento do fluido na cavidade. Além disso, reduzimos a dimensão do problema bidimensional de 3 para 2 variáveis, não sendo necessário aproximar as componentes da velocidade u e v , e ainda a pressão p , somente as variáveis escalares: função corrente ψ e vorticidade ω .

Uma vez definido o modelo matemático, as equações são discretizadas pelo método ADI. Para tanto, introduzimos derivadas das variáveis de interesse em relação ao tempo no modelo matemático, dando origem a uma representação pseudo-transiente das equações

governantes. A adição desses termos, além de permitir contornar a não linearidade característica das equações de Navier-Stokes, permite também o uso do método ADI, que resolve uma série de matrizes tridiagonais em direções alternadas do espaço. Porém, quando essas derivadas em relação ao tempo tendem a zero, a solução se aproxima das equações originais em regime estacionário. Neste contexto, implementamos computacionalmente as discretizações pelo método ADI dos modelos matemáticos. Empregamos discretizações de segunda ordem para os termos difusivos e convectivos, dando origem a uma abordagem de segunda ordem no tempo e no espaço. Por se tratar de um algoritmo iterativo, a solução em cada passo de tempo é computada até que uma tolerância, relacionada ao valor máximo absoluto dos resíduos referentes as equações governantes, seja atingida. Isso será feito utilizando as linguagens de programação C e Python. Em seguida, o código computacional desenvolvido é validado através da reprodução de exemplos clássicos da literatura, onde são executadas simulações para estudar os efeitos da velocidade, temperatura e magnetismo no movimento do fluido na cavidade quadrada.

Esta monografia é organizada como segue. Além do capítulo introdutório, há quatro capítulos. No Capítulo 2 são apresentadas os modelos matemáticos para os problemas estudados. No Capítulo 3 estes modelos são discretizados pelo método ADI. No Capítulo 4, os resultados numéricos são exibidos e comparações são feitas com a literatura. O Capítulo 5 trata da conclusão e trabalhos futuros.

2 Equações Governantes

Neste capítulo são introduzidos os modelos matemáticos dos problemas estudados. Primeiramente, são introduzidas as equações de Navier-Stokes, que governam escoamentos de fluidos Newtonianos e incompressíveis. Regido por essas equações, o problema do escoamento de um fluido em uma cavidade quadrada com a tampa aberta e um campo de velocidade no contorno da cavidade – chamado *lid-driven cavity flow* – é estudado. Em seguida, será mostrada a formulação do problema da convecção natural em cavidade quadrada, induzida por diferença de temperatura entre as paredes da cavidade. Para isso, será definida a aproximação de Boussinesq para a conservação de energia, que formará um sistema em conjunto com as equações de Navier-Stokes. Em terceiro lugar, serão apresentadas as equações de Maxwell para o eletromagnetismo em uma forma reduzida, que, conjuntamente às equações de Boussinesq e Navier-Stokes, formarão um sistema que descreve o escoamento de um fluido eletrocondutor dentro de uma cavidade quadrada, exposto a um campo eletromagnético exterior à cavidade. Esse campo gera uma diferença de temperatura dentro da cavidade, o que gera um movimento do fluido devido ao empuxo. Todos estes modelos matemáticos são reescritos em termos das variáveis função corrente e vorticidade, que reduz a complexidade e o número de variáveis e equações dos problemas.

2.1 Navier-Stokes

Há duas equações que em conjunto são chamadas equações de Navier-Stokes: A equação da conservação de momento (2.1) para um fluido Newtoniano, derivada a partir da segunda lei de Newton,

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \bar{\mu} \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}}, \quad (2.1)$$

e a equação da continuidade (2.2), derivada a partir da lei de conservação de massa de um fluido incompressível,

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.2)$$

em que ∇^2 é o operador de Laplace bidimensional, $\bar{p}$ é a pressão, $\bar{\rho}$ é a densidade, e $\bar{\mu}$ a viscosidade do fluido. O vetor $\bar{\mathbf{u}}$ é o campo de velocidade do fluido, e o vetor $\bar{\mathbf{f}}$ é a resultante das forças que atuam sobre o fluido, como gravidade. No caso bidimensional, sendo $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$, $\bar{\mathbf{f}} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$, e a viscosidade cinemática $\bar{\gamma} = \bar{\mu}/\bar{\rho}$, as equações da conservação de momento ficam

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \bar{f}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\gamma} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= \bar{f}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\gamma} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

e a equação de continuidade,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (2.4)$$

em coordenadas cartesianas.

Introduzindo o comprimento característico $\bar{L}$, e a velocidade característica $\bar{U}$, podemos definir as seguintes quantidades adimensionais,

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}}, \quad u = \frac{\bar{u}}{\bar{U}}, \quad t = \frac{\bar{t}\bar{U}}{\bar{L}}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{U}}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\bar{U}^2 \bar{\rho}}, \quad (2.5)$$

de modo que as equações do momento (2.3) e da continuidade (2.4) podem ser reescritas em sua forma adimensional, como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = f_2 - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.8)$$

onde

$$Re = \frac{\bar{U} \bar{L}}{\bar{\gamma}} \quad (2.9)$$

corresponde ao número de Reynolds, que expressa a relação entre as forças inerciais e as forças viscosas.

Definindo a função corrente ψ e a vorticidade ω , tais que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \text{e} \quad (2.10)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\nabla^2 \psi, \quad (2.11)$$

podemos reescrever as equações de Navier-Stokes (2.6), (2.7) e (2.8) em função dessas variáveis. Tomando o rotacional da equação (2.1), e usando a definição da função corrente em (2.2), temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad (2.13)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.14)$$

Subtraindo agora (2.12) de (2.13), temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Reescrevendo (2.15) usando a definição (2.11) da vorticidade ω , temos

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \omega + \frac{\partial v}{\partial y} \omega + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -f, \quad (2.16)$$

em que

$$f = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

A partir das relações entre ω e ψ com o campo de velocidade, é possível reescrever (2.16) como

$$- \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = f. \quad (2.17)$$

Se o fluido está estável, isto é, se o campo de velocidade é invariante em relação ao tempo, o termo transiente na equação (2.17) é anulado e assim chegamos nas equações de Navier-Stokes estacionárias, como segue:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -\omega \\ \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= f, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta é a chamada formulação função corrente-vorticidade, e é vantajosa pela seguinte razão. Ao invés de serem necessárias aproximações para três variáveis – as componentes u e v da velocidade, e a pressão p – são necessárias aproximações para apenas duas variáveis, ψ e ω . Estas variáveis de interesse são suficientes para se estudar o movimento do fluido. Ademais, a presença da pressão p no modelo levaria a dificuldades na resolução do sistema de equações (TÜRK, 2014). Em particular, quando resolvidas simultaneamente, velocidade e pressão necessitam de um tratamento especial para evitar oscilações no campo de pressão. Um exemplo desse tratamento é o *staggered grid*, no qual a velocidade e a pressão são avaliadas em diferentes pontos da malha (GRIEBEL; DORNSHEIFER; NEUNHOEFFER, 1997). Não obstante, as limitações da formulação função corrente-vorticidade se concentram na imposição das condições de contorno. Quando a vorticidade é atualizada no tempo, não há condições de contorno definidas para a mesma. É necessário observar a relação entre a vorticidade e a função corrente para a determinação dessas condições usando, por exemplo, a fórmula de Thom (WANG; LIU, 2002), como é feito no presente trabalho.

Considere agora um fluido em uma cavidade quadrada $[a, b] \times [a, b]$, com a tampa superior aberta. Um escoamento do fluido acima da cavidade – isto é, uma componente horizontal da velocidade $u > 0$ no contorno superior – produz tensões cisalhantes no fluido, o que gera um escoamento no interior da cavidade devido ao empuxo. Observe a Figura 2.1. Considerando $u = 1, v = 0$ no contorno superior, e $u = v = 0$ nas outras faces da cavidade, temos que $\psi = 0$ em todo o contorno, e que as condições de contorno da vorticidade são determinadas a partir da relação desta com a função corrente, após a discretização do domínio.

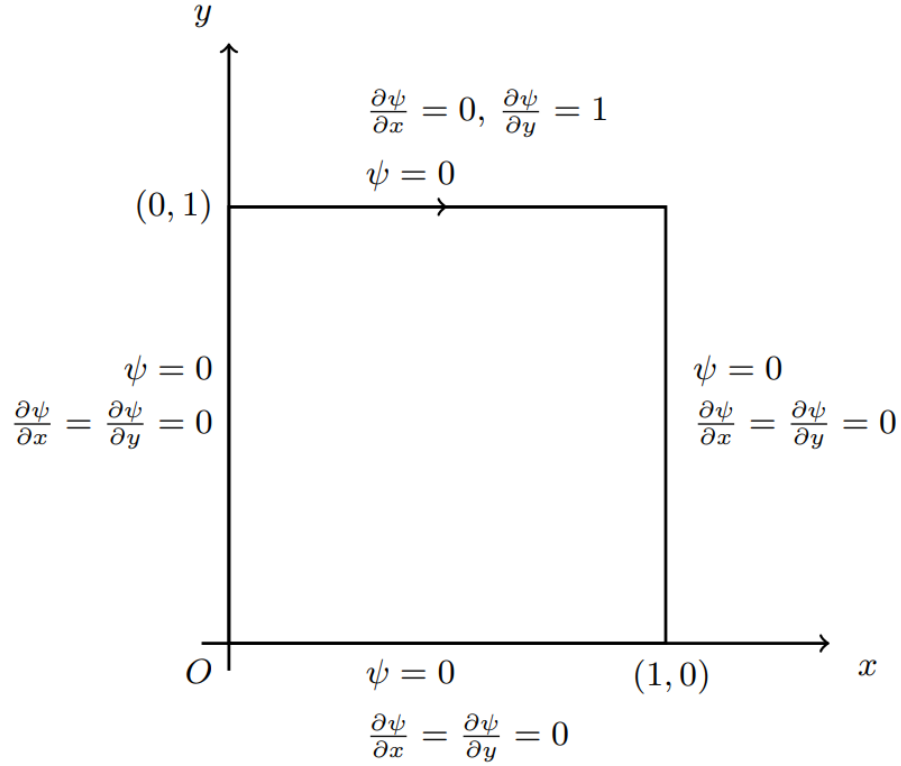


Figura 2.1: Condições de contorno que provocam o escoamento de um fluido em uma cavidade quadrada com a tampa aberta. Retirada de Türk (2014).

2.2 Escoamento por convecção natural

Quando há variação na temperatura do fluido, é necessária mais uma equação para modelar esta mudança. Para isto, usamos a aproximação de Boussinesq para a conservação de energia. Essa equação relaciona as mudanças na temperatura às mudanças na densidade do fluido. Juntando-a com a equação de transporte através do termo da força empuxo, como em (TÜRK, 2014), chegamos nas equações que governam o escoamento de um fluido por convecção natural.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\
 \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\gamma} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\
 \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\gamma} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + g \bar{\beta} (\bar{T} - \bar{T}_c) \\
 \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \bar{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right),
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

em que g é a aceleração gravitacional, $\bar{\alpha}$ é a difusividade térmica, $\bar{\gamma}$ é como definida na seção anterior, $\bar{T}$ é a temperatura, e $\bar{\beta}$ é o coeficiente da expansão térmica. Introduzindo novamente o comprimento característico $\bar{L}$ e a velocidade característica $\bar{U}$, temos as seguintes grandezas adimensionais,

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}}, \quad u = \frac{\bar{u}\bar{L}}{\bar{\alpha}}, \quad v = \frac{\bar{v}\bar{L}}{\bar{\alpha}}, \quad p = \frac{\bar{p}\bar{L}^2}{\bar{\alpha}^2\bar{\rho}}, \quad T = \frac{\bar{T} - \bar{T}_c}{\bar{T}_h - \bar{T}_c}, \quad (2.20)$$

em que T_c e T_h são as temperaturas das paredes quente e fria do domínio, respectivamente.

Podemos, então, reescrever (2.19) em sua forma adimensional, como segue.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + Pr \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + RaPrT \\ \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que Pr e Ra são os números adimensionais de Prandtl e Rayleigh, respectivamente, definidos como

$$Pr = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}}, \quad (2.22)$$

$$Ra = \frac{g\bar{\beta}(\bar{T}_h - \bar{T}_c)\bar{L}^3}{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}. \quad (2.23)$$

O número de Prandtl trata da razão entre os efeitos viscosos e térmicos. Quanto maior este número, menor a influência dos efeitos térmicos no escoamento. Já o número de Rayleigh equivale ao produto do número de Prandtl pela razão entre o empuxo e a viscosidade do fluido. Valores de Ra baixos denotam escoamentos laminares, e valores altos, escoamentos turbulentos¹.

Agora, na formulação função corrente-vorticidade-temperatura, as equações (2.21)

¹Neste trabalho tratamos exclusivamente de escoamentos bidimensionais. A noção de turbulência só existe para escoamentos tridimensionais.

ficam

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi &= -\omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= Pr \nabla^2 \omega + Ra Pr \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \nabla^2 T,\end{aligned}\tag{2.24}$$

com condições de contorno de Dirichlet para a temperatura,

$$T(x_b, y_b) = T_b,\tag{2.25}$$

ou de Neumann

$$\frac{\partial T}{\partial n} = g(q),\tag{2.26}$$

em que $g(q)$ é uma função do fluxo de calor q através do contorno do domínio. Quando este é adiabático, temos $g(q) = 0$.

A figura 2.2 ilustra as condições de contorno para o problema estudado. Temos um caso de uma cavidade quadrada $[0, 1] \times [0, 1]$, com diferencial de temperatura entre as paredes esquerda e direita, temos $T = 1$ no lado direito, $T = 0$ do lado esquerdo, nas paredes superior e inferior, temos condições de contorno de Neumann $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, representando uma fronteira adiabática. Para a função corrente, assim como na Seção 2.1, $\psi = 0$ em todo o contorno do domínio. As condições de contorno da vorticidade são derivadas a partir da função corrente, uma vez discretizado o domínio.

2.3 Convecção natural induzida por um campo magnético

Existe mais um caso que é estudado neste trabalho. Quando um campo magnético externo é aplicado sobre um fluido eletrocondutor – cujo escoamento é governado pelas equações de Navier-Stokes – variações na temperatura do fluido ocorrem. Isso então gera mudanças na densidade do fluido e, assim, um escoamento devido ao empuxo – ou seja, uma convecção natural do fluido devido a um campo magnético. Esse sistema é governado pelas equações de Navier-Stokes e de Maxwell (equações da magnetohidrodinâmica), e pela já vista aproximação de Boussinesq para a conservação de energia.

O análogo do supracitado número de Reynolds quando há campos magnéticos

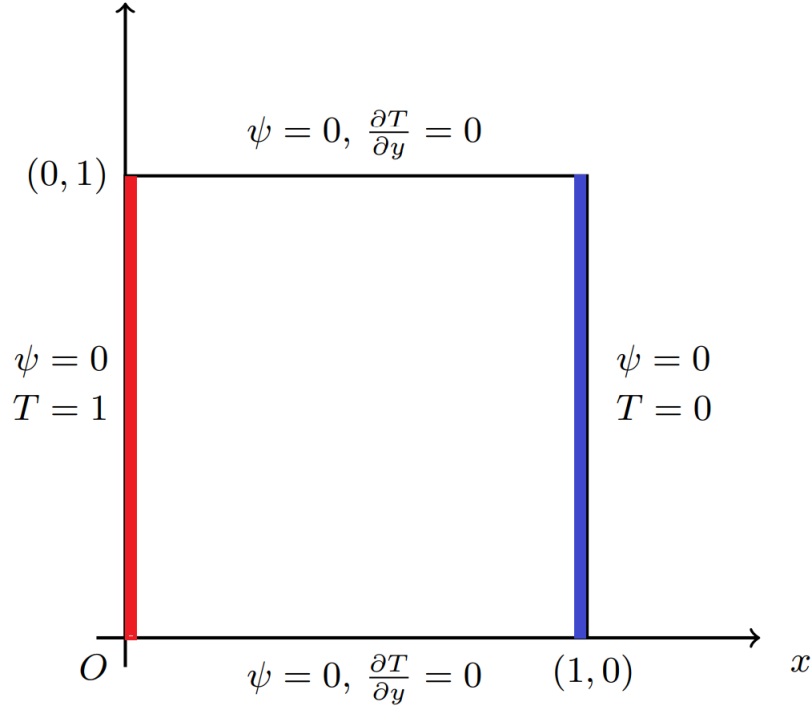


Figura 2.2: Condições de contorno para o escoamento de um fluido em uma cavidade quadrada $[0, 1] \times [0, 1]$ com diferencial de temperatura entre as paredes. Figura retirada de Türk (2014).

envolvidos é chamado número de Reynolds magnético Rm . Supondo valores pequenos desse parâmetro, podemos ignorar o campo magnético induzido dentro do fluido. Deste modo, as equações da indução magnética, do aquecimento do fluido devido ao efeito Joule, e o efeito da dissipação viscosa podem ser descartados do sistema de equações. Portanto, dada essa suposição, o sistema de equações que governa o escoamento por convecção de um fluido eletrocondutor exposto à um campo magnético externo ao domínio é como segue (KAKARANTZAS et al., 2009).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + RaPrT\mathbf{e}_z + Pr\nabla^2 \mathbf{u} + PrHa^2(\mathbf{J} \times \mathbf{e}_B) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T,$$

em que $\mathbf{e}_z$ é um vetor unitário na direção do canal de escoamento, $\mathbf{e}_B$ é um vetor unitário na direção do campo magnético aplicado. $\mathbf{J}$ é a densidade da corrente elétrica, e Ha é o

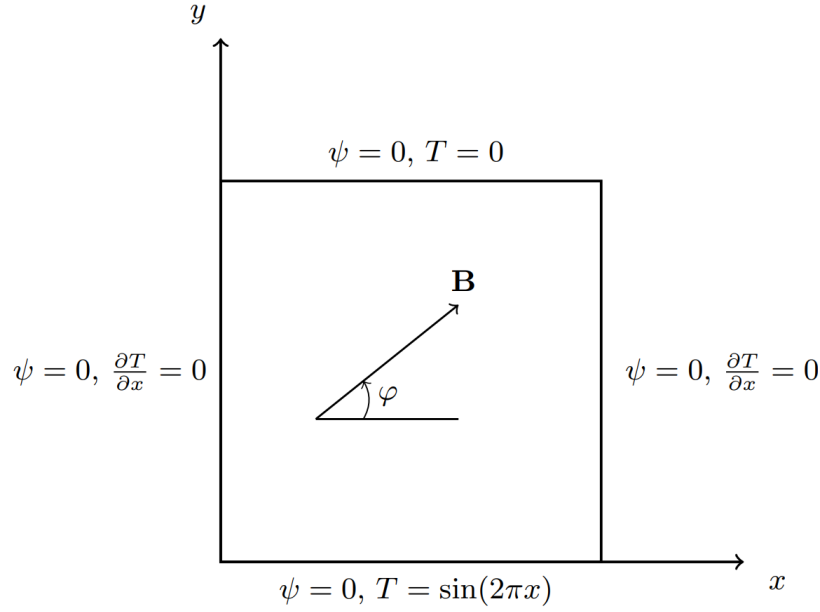


Figura 2.3: Condições de contorno para o escoamento de um fluido eletrocondutor em uma cavidade quadrada, regido pelas equações de Navier-Stokes, Maxwell, e Boussinesq, e exposto a um campo magnético $\mathbf{B}$. Retirada de Türk (2014).

número de Hartmann, definido como

$$Ha = \bar{L} B_0 \sqrt{\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\mu}}}, \quad (2.28)$$

em que B_0 é a intensidade constante do campo magnético, que opera em direção de $\mathbf{e}_B$, e $\bar{\sigma}$ é a condutividade elétrica do fluido. O número de Hartmann representa a razão das forças magnéticas sobre as forças viscosas.

Considerando uma cavidade $[0, 1] \times [0, 1]$, e um campo magnético $\mathbf{B}$ exterior à cavidade, podemos adotar um procedimento análogo ao das Seções 2.1 e 2.2, e reescrever as equações (2.27) em sua formulação função-corrente-vorticidade-temperatura, como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -\omega \\ Pr \nabla^2 \omega &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - Ra Pr \frac{\partial T}{\partial x} \\ &\quad - Ha^2 Pr \left[\cos \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \cos \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \sin \varphi \left(\sin \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \cos \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right) \right] \\ \nabla^2 T &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que φ é o ângulo do campo magnético em relação à cavidade, como na Figura 2.3.

Aplicando o campo magnético na direção horizontal – isto é, fazendo $\varphi = 0$ – chegamos

à seguinte formulação do problema.

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \psi &= -\omega \\
 Pr \nabla^2 \omega &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - Ra Pr \frac{\partial T}{\partial x} - Ha^2 Pr \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\
 \nabla^2 T &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

As condições de contorno para a temperatura e função corrente do fluido são como especificadas na Figura 2.3. Dos lados esquerdo e direito da cavidade, temos fronteiras adiabáticas. A parede de cima é fria ($T = 0$), enquanto a parede inferior é aquecida de forma senoidal em relação à x . O valor da função corrente é 0 em todo o contorno. A partir daí, podemos derivar as condições de contorno da vorticidade, uma vez discretizado o domínio.

3 Abordagem Numérica

Neste capítulo são introduzidas as discretizações pelo método ADI para os problemas apresentados no Capítulo 2, e o tratamento das condições de contorno para os diferentes cenários, relacionados ao problema da cavidade, descritos na seção anterior. Os problemas apresentados no Capítulo 2 são estacionários e não lineares. Para resolvê-los é necessário o uso de métodos iterativos de linearização. Assim, para gerar um algoritmo numérico iterativo, adicionamos às equações governantes derivadas em relação ao tempo da função corrente, vorticidade e temperatura. Esta abordagem, além de resolver a não linearidade, permite o uso da estratégia ADI. O método ADI resolve o problema em passos de tempo intermediários em cada direção do espaço. A vantagem desta metodologia é que cada equação agora requer a solução de um sistema tridiagonal. Dessa forma, a solução das equações é encontrada pelo método em passos sucessivos no tempo, e quando os termos temporais tendem a zero, seguindo algum critério de parada, a solução resultante pode ser dita adequada para o problema em sua forma estacionária.

3.1 Discretização das equações de Navier-Stokes

Partindo das equações de Navier-Stokes em sua forma função corrente-vorticidade e considerando o caso em que $f = 0$, transformamos as equações (2.18) em um problema pseudo-transiente, através da adição de derivadas temporais da função corrente e vorticidade às duas equações, obtendo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla^2 \psi = \omega \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla^2 \omega + Re \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - Re \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Pelo método ADI, partindo do instante n , determinamos a solução da equação (3.1) em um instante intermediário $n + 1/2$, implicitamente na direção x . Usando essa solução intermediária, resolvemos a equação novamente em um intervalo de tempo $n + 1$, im-

plicitamente em y . O mesmo processo é repetido para a equação da vorticidade (3.2). Particionando o domínio, portanto, em I pontos horizontalmente, e J pontos verticalmente, e determinando a solução nos pontos (i, j) , com $i = 1, \dots, I - 1$, $j = 1, \dots, J - 1$ – dadas soluções no contorno $i = 0, I$, $j = 0, J$ – temos a seguinte discretização para a equação (3.1).

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} &= \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} &= \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para a equação (3.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t/2} - \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} &+ Re \left(\frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right) \\ &= \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ &+ Re \left(\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right), \\ \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} &- Re \left(\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\ &= \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \\ &- Re \left(\frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Adotando $\Delta x = \Delta y = h$ e definindo $\sigma = \Delta t/2h^2$, podemos reescrever a equação (3.3)

como

$$\begin{aligned} (1 + 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1/2} - \sigma (\psi_{i+1,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}) &= \frac{\Delta t}{2} \omega_{i,j}^n + (1 - 2\sigma) \psi_{i,j}^n + \sigma (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n), \\ (1 + 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1} - \sigma (\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}) &= \frac{\Delta t}{2} \omega_{i,j}^n + (1 - 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (\psi_{i+1,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

e tomando ainda

$$\rho_x = Re \left(\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{4} \right) \quad \text{e} \quad \rho_y = Re \left(\frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{4} \right),$$

podemos reescrever (3.4) como

$$\begin{aligned} (1 + 2\sigma) \omega_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (\rho_y - 1) \omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \sigma (\rho_y + 1) \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \\ = (1 - 2\sigma) \omega_{i,j}^n + \sigma (\rho_x + 1) \omega_{i,j+1}^n + \sigma (1 - \rho_x) \omega_{i,j-1}^n, \\ (1 + 2\sigma) \omega_{i,j}^{n+1} - \sigma (\rho_x + 1) \omega_{i,j+1}^{n+1} + \sigma (\rho_x - 1) \omega_{i,j-1}^{n+1} \\ = (1 - 2\sigma) \omega_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (1 - \rho_y) \omega_{i+1,j}^{n+1/2} + \sigma (1 + \rho_y) \omega_{i-1,j}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Note que os sistemas resultantes podem ser representados, em suas formas matriciais, por matrizes tridiagonais. Deste modo, podem ser resolvidos de maneira eficiente pelo algoritmo de Thomas (SOURI; AKBARZADEH; DARIAN, 2020). Em particular, na implementação usada neste trabalho, as três diagonais da matriz de coeficientes são armazenadas em três vetores, ao invés de uma matriz densa, o que reduz ainda mais o custo computacional.

A inclusão dos termos temporais tem por objetivo contornar a não linearidade e viabilizar o uso do método ADI que, apesar de apresentar a evolução temporal do fenômeno simulado, pode ser evoluído até atingir o regime permanente ou estacionário. Neste caso, resíduos associados as equações da função corrente (R_ψ) e vorticidade (R_ω), em sua forma discretizada, são utilizados para indicar a convergência do método para o regime estacionário. Assim, definindo os resíduos associados à função corrente

$$R_\psi^{n+1}(i, j) = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \omega_{i,j}^{n+1} \quad (3.7)$$

e à vorticidade

$$\begin{aligned}
 R_\omega^{n+1}(i, j) = & \frac{1}{Re} \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \\
 & - \left(\frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\
 & + \left(\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

temos que a redução da magnitude desses resíduos pode indicar a convergência da aproximação em regime transiente para o estado estacionário. Deste modo, adotamos a seguinte abordagem para calcular o critério de parada associado ao regime estacionário

$$\max \left(\|R_\psi^{n+1}\|_\infty, \|R_\omega^{n+1}\|_\infty \right) \leq C, \tag{3.9}$$

em que

$$\|R_\psi^{n+1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq I-1; 1 \leq j \leq J-1} |R_\psi^{n+1}(i, j)|, \tag{3.10}$$

e

$$\|R_\omega^{n+1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq I-1; 1 \leq j \leq J-1} |R_\omega^{n+1}(i, j)| \tag{3.11}$$

são as normas do infinito dos resíduos da função corrente e da vorticidade. C é a tolerância que, neste trabalho, é fixada em 10^{-6} .

O procedimento descrito acima pode ser expresso como um algoritmo sequencial iterativo, como segue.

Algoritmo 1: *lid-driven cavity flow*

```

1 Dadas as condições iniciais  $\psi^0$  e  $\omega^0$ ;
2  $n = 0$ ;
3 do
4   Computar  $\psi^{n+1/2}$  implicitamente em  $x$  usando  $\omega^n$  e  $\psi^n$ ;
5   Computar  $\psi^{n+1}$  implicitamente em  $y$  usando  $\omega^n$  e  $\psi^{n+1/2}$ ;
6   Computar  $\omega^{n+1/2}$  implicitamente em  $x$  usando  $\omega^n$  e  $\psi^{n+1}$ ;
7   Computar  $\omega^{n+1}$  implicitamente em  $y$  usando  $\omega^{n+1/2}$  e  $\psi^{n+1}$ ;
8    $n = n + 1$ ;
9 while  $\max(\mathbf{abs}(R_\psi^{n+1}), \mathbf{abs}(R_\omega^{n+1})) > C$ ;

```

Observe agora a Figura 2.1, que explicita as condições de contorno da função corrente e da velocidade do fluido. Para cada contorno do domínio Ω discretizado, devem ser respeitadas as seguintes relações.

$$\begin{aligned}
\omega_{i,J} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,J}, & \omega_{i,0} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,0}, & i &= 0, 1, \dots, I \\
\omega_{0,j} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{0,j}, & \text{e } \omega_{I,j} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{I,j}, & j &= 0, 1, \dots, J.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando a expansão em séries de Taylor para aproximar as derivadas de segunda ordem, obtemos, para o contorno superior,

$$\psi_{i,J-1} = \psi_{i,J} - \Delta y \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,J} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,J}. \tag{3.13}$$

Recordando que $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$, temos que

$$\omega_{i,J} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,J} = 2 \frac{\psi_{i,J} - \psi_{i,J-1}}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta y} u_{i,J}. \tag{3.14}$$

O procedimento é análogo para os outros contornos do domínio. Como $\psi = 0$ nos contornos e, somente a componente u da velocidade no contorno superior é diferente de 0, então adotando $u_{i,J} = 1$, e lembrando que $\Delta x = \Delta y = h$, chegamos às seguintes

condições de contorno para a vorticidade.

$$\begin{aligned}\omega_{i,J} &= -2\frac{\psi_{i,J-1}}{h^2} - \frac{2}{h}, & \omega_{i,0} &= -2\frac{\psi_{i,1}}{h^2}, & i &= 0, 1, \dots, I \\ \omega_{0,j} &= -2\frac{\psi_{1,j}}{h^2}, & \text{e } \omega_{I,j} &= -2\frac{\psi_{I-1,j}}{h^2}, & j &= 0, 1, \dots, J.\end{aligned}\tag{3.15}$$

3.2 Discretização do problema da convecção natural

Partindo do problema da convecção natural (2.24), assim como feito para o problema de Navier-Stokes da seção anterior, adicionamos os seguintes termos transientes às equações, de modo a discretizá-las via ADI.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla^2 \psi &= \omega \\ \frac{1}{\alpha_T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \nabla^2 T \\ \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= Pr \nabla^2 \omega + Ra Pr \frac{\partial T}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Os coeficientes α_ψ , α_T , e α_ω introduzem graus de liberdade ao problema, de modo a controlar a estabilidade numérica e a taxa de aproximação ao estado estacionário. Estes parâmetros podem ser variados com o intuito de acelerar a convergência das equações para o regime estacionário (para mais detalhes, ver Davis (1983)). Observe que, em relação às equações de Navier-Stokes (problema anterior), há aqui a inclusão da equação do calor, o que aumenta o tamanho do problema, e consequentemente, o custo computacional.

Adotando um procedimento análogo ao visto na Seção 3.1, temos a seguinte discretização do problema pelo método ADI:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_\psi} \frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} &= \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}, \\ \frac{1}{\alpha_\psi} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} &= \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}\end{aligned}\tag{3.17}$$

para a função corrente,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_T} \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta t/2} + \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta x \Delta y} \\
& - \frac{(T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \\
& = \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n)}{4\Delta y \Delta x} + \frac{(T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)}{\Delta y^2}, \\
& \frac{1}{\alpha_T} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x \Delta y} \\
& - \frac{(T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2} \\
& = - \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta y \Delta x} + \frac{(T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

para a temperatura, e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t/2} + \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta y \Delta x} \\
& - Pr \frac{(\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \\
& = \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n)}{4\Delta x \Delta y} + Pr \frac{(\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n)}{\Delta y^2} \\
& + RaPr \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}, \\
& \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x \Delta y} - Pr \frac{(\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2} \\
& = - \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta y \Delta x} + Pr \frac{(\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \\
& + RaPr \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

para a vorticidade. Adotando, como na seção anterior, $\Delta x = \Delta y = h$, e definindo

$$\sigma = \frac{\Delta t}{2h^2}, \quad \rho_x = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{4}, \quad \rho_y = \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{4}, \quad \text{e} \quad \Theta_x = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}, \tag{3.20}$$

reescrevemos as equações (3.17), (3.18), e (3.19) na forma de um sistema cuja matriz de

coeficientes é tridiagonal, como segue.

$$\begin{aligned}
(1/\alpha_\psi + 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1/2} - \sigma (\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \psi_{i-1,j}^{n+1/2}) \\
= \frac{\Delta t}{2} \omega_{i,j}^n + (1/\alpha_\psi - 2\sigma) \psi_{i,j}^n + \sigma (\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) \\
(1/\alpha_\psi + 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1} - \sigma (\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) \\
= \frac{\Delta t}{2} \omega_{i,j}^n + (1/\alpha_\psi - 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \psi_{i-1,j}^{n+1/2})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

para a função corrente,

$$\begin{aligned}
(1/\alpha_T + 2\sigma) T_{i,j}^{n+1/2} - \sigma (\rho_y + 1) T_{i-1,j}^{n+1/2} + \sigma (\rho_y - 1) T_{i+1,j}^{n+1/2} \\
= (1/\alpha_T - 2\sigma) T_{i,j}^n + \sigma (\rho_x + 1) T_{i,j+1}^n + \sigma (1 - \rho_x) T_{i,j-1}^n, \\
(1/\alpha_T + 2\sigma) T_{i,j}^{n+1} + \sigma (\rho_x - 1) T_{i,j-1}^{n+1} - \sigma (\rho_x + 1) T_{i,j+1}^{n+1} \\
= (1/\alpha_T - 2\sigma) T_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (1 - \rho_y) T_{i+1,j}^{n+1/2} + \sigma (1 + \rho_y) T_{i-1,j}^{n+1/2}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

para a temperatura, e

$$\begin{aligned}
(1/\alpha_\omega + 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (\rho_y - Pr) \omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \sigma (\rho_y + Pr) \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \\
= (1/\alpha_\omega - 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^n + \sigma (\rho_x + Pr) \omega_{i,j+1}^n + \sigma (Pr - \rho_x) \omega_{i,j-1}^n + \frac{\Delta t}{2} RaPr\Theta_x \\
(1/\alpha_\omega + 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^{n+1} - \sigma (\rho_x + Pr) \omega_{i,j+1}^{n+1} + \sigma (\rho_x - Pr) \omega_{i,j-1}^{n+1} \\
= (1/\alpha_\omega - 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (Pr - \rho_y) \omega_{i+1,j}^{n+1/2} + \sigma (Pr + \rho_y) \omega_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} RaPr\Theta_x
\end{aligned} \tag{3.23}$$

para a vorticidade. Sendo os resíduos associados à função corrente, à temperatura, e à vorticidade como definidos abaixo, temos que a convergência desses resíduos para 0 indica a convergência da solução para o estado estacionário, assim como mostrado para as equações de Navier-Stokes na seção anterior.

$$R_\psi^{n+1}(i, j) = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \omega_{i,j}^{n+1}, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
R_T^{n+1}(i, j) = -\frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1})(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})}{4\Delta x\Delta y} + \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1})(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta y\Delta x} \\
+ \frac{(T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1})}{\Delta x^2} + \frac{(T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

e

$$R_{\omega}^{n+1}(i, j) = -\frac{1}{Ra} \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1})(\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1})}{4\Delta y \Delta x} + \frac{1}{Ra} \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1})(\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x \Delta y} \\ + \frac{Pr}{Ra} \frac{(\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2} + \frac{Pr}{Ra} \frac{(\omega_{i+1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1})}{\Delta x^2} + Pr \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}. \quad (3.26)$$

Podemos, desta forma, verificar a convergência para o estado estacionário pelo seguinte critério.

$$\max (||R_{\psi}^{n+1}||_{\infty}, ||R_T^{n+1}||_{\infty}, ||R_{\omega}^{n+1}||_{\infty}) \leq C, \quad (3.27)$$

em que $||R_{\psi}^{n+1}||_{\infty}$, $||R_{\omega}^{n+1}||_{\infty}$ e C são como definidas em (3.10) e (3.11), e

$$||R_T^{n+1}||_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq I-1; 1 \leq j \leq J-1} |R_T^{n+1}(i, j)|,$$

é a norma do infinito dos resíduos da temperatura. Assim como para o problema anterior, temos um algoritmo sequencial iterativo que descreve o processo de resolução das equações governantes, como segue.

Algoritmo 2: *Convecção natural*

- 1 Dada as condições iniciais ψ^0 , T^0 e ω^0 ;
 - 2 $n = 0$;
 - 3 **do**
 - 4 Computar $\psi^{n+1/2}$ implicitamente em x usando ω^n e ψ^n ;
 - 5 Computar ψ^{n+1} implicitamente em y usando ω^n e $\psi^{n+1/2}$;
 - 6 Computar $T^{n+1/2}$ implicitamente em x usando T^n e ψ^{n+1} ;
 - 7 Computar T^{n+1} implicitamente em y usando $T^{n+1/2}$ e ψ^{n+1} ;
 - 8 Computar $\omega^{n+1/2}$ implicitamente em x usando ω^n , ψ^{n+1} e T^{n+1} ;
 - 9 Computar ω^{n+1} implicitamente em y usando $\omega^{n+1/2}$, ψ^{n+1} e T^{n+1} ;
 - 10 $n = n + 1$;
 - 11 **while** $\max(abs(R_{\psi}^{n+1}), abs(R_T^{n+1}), abs(R_{\omega}^{n+1})) > C$;
-

Para a função corrente são prescritas condições de contorno de Dirichlet, com $\psi = 0$ sobre $\partial\Omega$. Ao contrário do problema *lid-driven cavity flow*, aqui a cavidade é fechada em todos os lados. Portanto, observada a relação entre a função corrente e a

vorticidade, e seguindo um procedimento análogo ao demonstrado na Seção 2.1, temos as seguintes condições de contorno para a vorticidade.

$$\begin{aligned}\omega_{i,J} &= -2\frac{\psi_{i,J-1}}{h^2}, & \omega_{i,0} &= -2\frac{\psi_{i,1}}{h^2}, & i &= 0, 1, \dots, I \\ \omega_{0,j} &= -2\frac{\psi_{1,j}}{h^2}, & \text{e } \omega_{I,j} &= -2\frac{\psi_{I-1,j}}{h^2}, & j &= 0, 1, \dots, J.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Observe que aqui não há mais a condição de fronteira superior aberta, como havia no problema *lid-driven cavity flow*. Para a temperatura, as condições de contorno são como prescritas na figura 2.2. Temos fronteiras adiabáticas nos contornos superior e inferior, com $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, e condições de Dirichlet nos contornos esquerdo, no qual $T = 1$, e direito, no qual $T = 0$.

3.3 Discretização do problema da convecção natural induzida por efeitos magnéticos

Partindo das equações (2.30), e adicionando termos transientes com os respectivos coeficientes às três equações, de modo a discretizá-las pelo método ADI, chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla^2 \psi &= \omega \\ \frac{1}{\alpha_T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \nabla^2 T \\ \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= Pr \nabla^2 \omega + Ra Pr \frac{\partial T}{\partial x} + Ha^2 Pr \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Analogamente aos passos desenvolvidos nas Seções 3.1 e 3.2, introduzimos a seguinte discretização das equações (3.29) empregando a metodologia ADI:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_\psi} \frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} &= \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}, \\ \frac{1}{\alpha_\psi} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} &= \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}\end{aligned}\quad (3.30)$$

para a função corrente,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_T} \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta t/2} + \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta x \Delta y} - \frac{(T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \\
&= \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n)}{4\Delta y \Delta x} + \frac{(T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)}{\Delta y^2}, \\
& \frac{1}{\alpha_T} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x \Delta y} - \frac{(T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2} \\
&= -\frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta y \Delta x} + \frac{(T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

para a temperatura, e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t/2} + \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta y \Delta x} - Pr \frac{(\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \\
&= \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n)}{4\Delta x \Delta y} + Pr \frac{(\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n)}{\Delta y^2} \\
&+ RaPr \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + Ha^2 Pr \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}, \\
& \frac{1}{\alpha_\omega} \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}) (\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x \Delta y} - Pr \frac{(\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2} \\
&= -\frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) (\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{4\Delta y \Delta x} + Pr \frac{(\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \\
&+ RaPr \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + Ha^2 Pr \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

para a vorticidade. Adotando, como nas seções anteriores, $\Delta x = \Delta y = h$, mais as definições (3.20), e ainda

$$\Psi_{x^2} = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{3.33}$$

reescrevemos as equações (3.30), (3.31), e (3.32) na forma de um sistema cuja matriz de coeficientes é tridiagonal, como segue.

$$\begin{aligned}
& (1/\alpha_\psi + 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1/2} - \sigma (\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \psi_{i-1,j}^{n+1/2}) \\
&= \frac{\Delta t}{2} \omega_{i,j}^n + (1/\alpha_\psi - 2\sigma) \psi_{i,j}^n + \sigma (\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) \\
& (1/\alpha_\psi + 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1} - \sigma (\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}) \\
&= \frac{\Delta t}{2} \omega_{i,j}^n + (1/\alpha_\psi - 2\sigma) \psi_{i,j}^{n+1/2} + \sigma (\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \psi_{i-1,j}^{n+1/2})
\end{aligned} \tag{3.34}$$

para a função corrente,

$$\begin{aligned}
(1/\alpha_T + 2\sigma) T_{i,j}^{n+1/2} - \sigma(\rho_y + 1) T_{i-1,j}^{n+1/2} + \sigma(\rho_y - 1) T_{i+1,j}^{n+1/2} \\
= (1/\alpha_T - 2\sigma) T_{i,j}^n + \sigma(\rho_x + 1) T_{i,j+1}^n + \sigma(1 - \rho_x) T_{i,j-1}^n, \\
(1/\alpha_T + 2\sigma) T_{i,j}^{n+1} + \sigma(\rho_x - 1) T_{i,j-1}^{n+1} - \sigma(\rho_x + 1) T_{i,j+1}^{n+1} \\
= (1/\alpha_T - 2\sigma) T_{i,j}^{n+1/2} + \sigma(1 - \rho_y) T_{i+1,j}^{n+1/2} + \sigma(1 + \rho_y) T_{i-1,j}^{n+1/2}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

para a temperatura, e

$$\begin{aligned}
(1/\alpha_\omega + 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^{n+1/2} + \sigma(\rho_y - Pr) \omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \sigma(\rho_y + Pr) \omega_{i-1,j}^{n+1/2} = (1/\alpha_\omega - 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^n \\
+ \sigma(\rho_x + Pr) \omega_{i,j+1}^n + \sigma(Pr - \rho_x) \omega_{i,j-1}^n + \frac{\Delta t}{2} Ra Pr \Theta_x + \frac{\Delta t}{2} Ha^2 Pr \Psi_{x^2} \\
(1/\alpha_\omega + 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^{n+1} - \sigma(\rho_x + Pr) \omega_{i,j+1}^{n+1} + \sigma(\rho_x - Pr) \omega_{i,j-1}^{n+1} = (1/\alpha_\omega - 2Pr\sigma) \omega_{i,j}^{n+1/2} \\
+ \sigma(Pr - \rho_y) \omega_{i+1,j}^{n+1/2} + \sigma(Pr + \rho_y) \omega_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} Ra Pr \Theta_x + \frac{\Delta t}{2} Ha^2 Pr \Psi_{x^2}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

para a vorticidade. Repetindo o feito nas seções anteriores, e definindo os resíduos relativos à função corrente, à temperatura, e à vorticidade como segue, podemos verificar a convergência da solução para o estado estacionário conforme os resíduos convergem para 0.

$$R_\psi^{n+1}(i, j) = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \omega_{i,j}^{n+1}, \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
R_T^{n+1}(i, j) = -\frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1})(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})}{4\Delta x \Delta y} + \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1})(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta y \Delta x} \\
+ \frac{(T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1})}{\Delta x^2} + \frac{(T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2},
\end{aligned} \tag{3.38}$$

e

$$\begin{aligned}
R_\omega^{n+1}(i, j) = -\frac{1}{Ra} \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1})(\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1})}{4\Delta y \Delta x} + \frac{1}{Ra} \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1})(\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x \Delta y} \\
+ \frac{Pr}{Ra} \frac{(\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y^2} + \frac{Pr}{Ra} \frac{(\omega_{i+1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1})}{\Delta x^2} + Pr \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
+ \frac{Ha^2 Pr}{Ra} \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Verificamos a convergência usando o mesmo critério usado na seção 3.2:

$$\max \left(\|R_\psi^{n+1}\|_\infty, \|R_T^{n+1}\|_\infty, \|R_\omega^{n+1}\|_\infty \right) \leq C, \quad (3.40)$$

em que $\|R_\psi^{n+1}\|_\infty$, $\|R_\omega^{n+1}\|_\infty$, $\|R_T^{n+1}\|_\infty$ e C são como definidos na seção anterior. O algoritmo seguido aqui é o igual ao da seção anterior (Algoritmo 2). Usando as condições de contorno especificadas na figura 2.3 para a função corrente e temperatura, podemos, seguindo um procedimento análogo ao da Seção 3.1, descrever as condições de contorno para a vorticidade como segue.

$$\begin{aligned} \omega_{i,J} &= -2 \frac{\psi_{i,J-1}}{h^2}, & \omega_{i,0} &= -2 \frac{\psi_{i,1}}{h^2}, & i &= 0, 1, \dots, I \\ \omega_{0,j} &= -2 \frac{\psi_{1,j}}{h^2}, & \text{e } \omega_{I,j} &= -2 \frac{\psi_{I-1,j}}{h^2}, & j &= 0, 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (3.41)$$

É importante ressaltar que, apesar deste modelo ser uma extensão direta do problema da convecção natural apresentado na seção anterior, os autores não encontraram na literatura, para cavidades quadradas, a abordagem numérica desenvolvida nesta seção.

4 Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos das soluções obtidas pelas discretizações pelo método ADI desenvolvidas no Capítulo 3 para os modelos (2.18), (2.24) e (2.30) apresentados no Capítulo 2. Os resultados são validados através de comparações feitas com *benchmarks* da literatura. Foram obtidos resultados para diferentes valores dos números adimensionais Re , Ra , Pr , e Ha . Foram considerados, para todos os problemas simulados, uma cavidade quadrada $[0, 1] \times [0, 1]$. A condição inicial para todos os estudos feitos foi $\psi = 0$, $\omega = 0$, e $T = 0$ nos estudos que envolvem convecção natural, em todo o domínio. Todas as computações foram executadas em uma máquina com sistema operacional Windows 10 64-bit, equipada com processador Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU @ 2.60GHz, e 16 GB de memória RAM. Os códigos foram escritos em linguagem C, e a análise dos resultados (plot dos gráficos e figuras) foi feita em Python. Os códigos estão disponíveis na plataforma GitHub, e podem ser acessados através do link <https://github.com/avmhdt/Navier-Stokes-Natural-Convection-MHD>.

4.1 *Lid-driven cavity flow*

Para o problema *lid-driven cavity flow* foram comparações com Ghia, Ghia e Shin (1982), estudo no qual foram calculados: (1) o valor das componentes horizontal e vertical da velocidade do fluido passando por linhas $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente (linhas passando pelo centro geométrico da cavidade), e (2) o valor máximo absoluto da função corrente, e a vorticidade e coordenadas x e y correspondentes, para $Re = 1000$. São reproduzidas também as comparações, neste último quesito, realizadas por Erturk, Corke e Gökçöl (2005). Para o item (1) foram usadas malhas de 128 e 256 elementos, com valores de Re variando de 100 a 10000. Isso representa forças inerciais 100 a 10000 vezes maiores que as forças viscosas atuando sobre o fluido. Para o item (2), foram usadas também malhas de 128 a 256 elementos. A Tabela 4.1 mostra o número de iterações para atingir a tolerância $C = 10^{-6}$ em (3.9), para todas as simulações executadas. O valor base de Δt

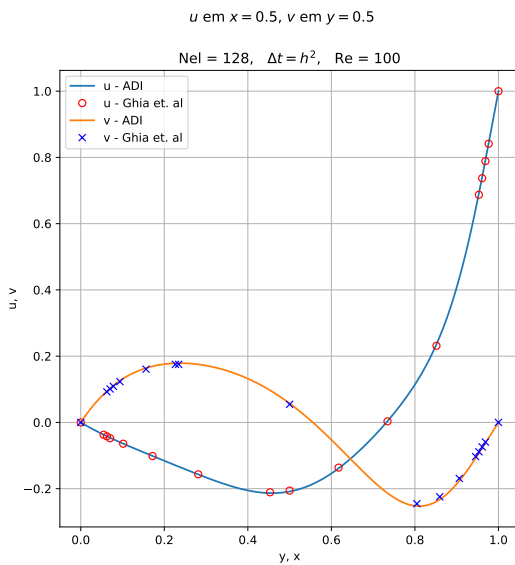
Nel	Re	Δt	Número de iterações	Nel	Re	Δt	Número de iterações
128	100	h^2	10680	256	400	h^2	53833
128	400	h^2	13500	256	1000	h^2	56566
128	1000	h^2	14295	256	2500	h^2	59532
128	2500	$h^2/2$	30304	256	3200	h^2	61036
128	3200	$h^2/4$	62137	256	5000	$h^2/2$	129814
128	5000	$h^2/10$	166333	256	7500	$h^2/4$	281308
256	100	h^2	42715	256	10000	$h^2/10$	744600

Tabela 4.1: Número de iterações para todas as simulações executadas. Foi adotado o critério de parada 3.9, com $C = 10^{-6}$.

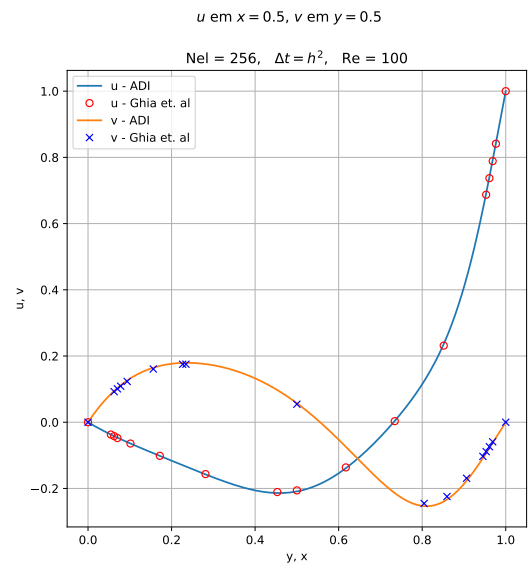
usado foi h^2 , e esse valor foi sendo refinado conforme a convergência não era obtida para valores subsequentemente elevados do número de Reynolds. As Figuras 4.1-4.4 mostram os resultados obtidos para os componentes u e v da velocidade do fluido obtidos através das relações (2.10), utilizando o esquema central de diferenças finitas:

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2h}; \quad v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h}. \quad (4.1)$$

Os resultados são comparados com os de *Ghia et al.* para diferentes valores de Re , ao longo das linhas que atravessam o centro geométrico de gravidade do domínio. Somente foram escolhidos em Ghia, Ghia e Shin (1982), pontos típicos, que incluem pontos de máximos e mínimos locais para todos os valores de Re , ao invés de todos os pontos na grade de 129×129 . Os resultados são explicitados em forma de tabela no Apêndice A.



(a) $Nel = 128$, $Re = 100$, $\Delta t = h^2$



(b) $Nel = 256$, $Re = 100$, $\Delta t = h^2$

Figura 4.1: Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 100$.

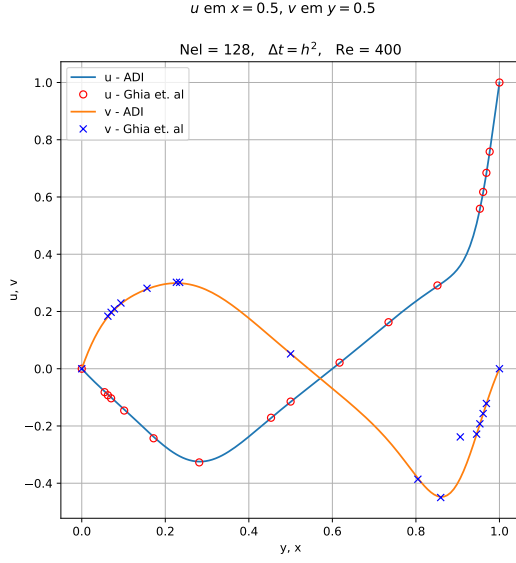
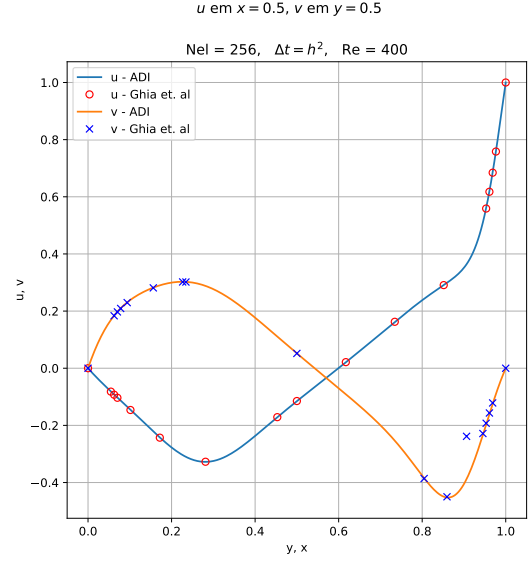
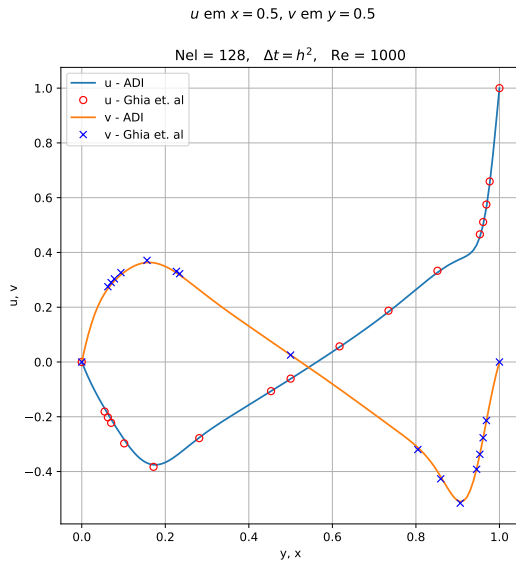
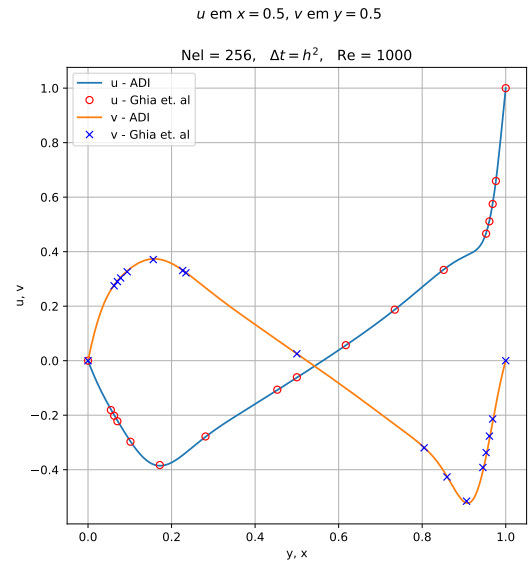
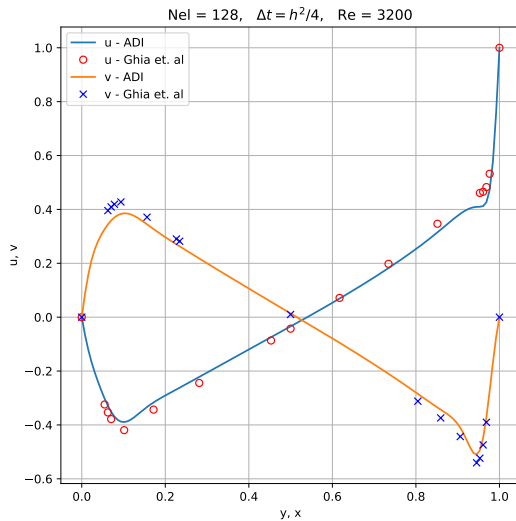
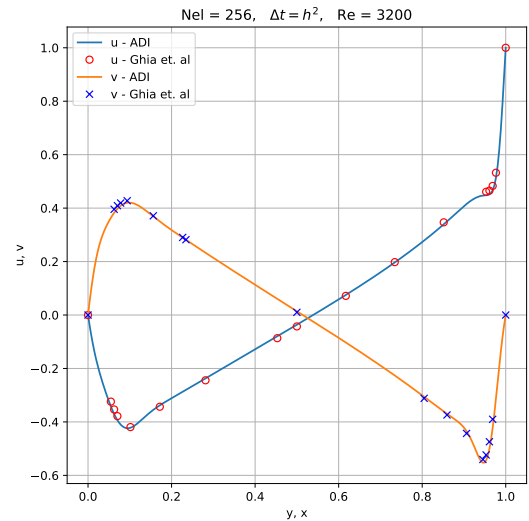
(a) $Nel = 128, Re = 400, \Delta t = h^2$ (b) $Nel = 256, Re = 400, \Delta t = h^2$ (c) $Nel = 128, Re = 1000, \Delta t = h^2$ (d) $Nel = 256, Re = 1000, \Delta t = h^2$ (e) $Nel = 128, Re = 3200, \Delta t = h^2/4$ (f) $Nel = 256, Re = 3200, \Delta t = h^2$

Figura 4.2: Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 400$ (cima), 1000 (meio), e 3200 (baixo).

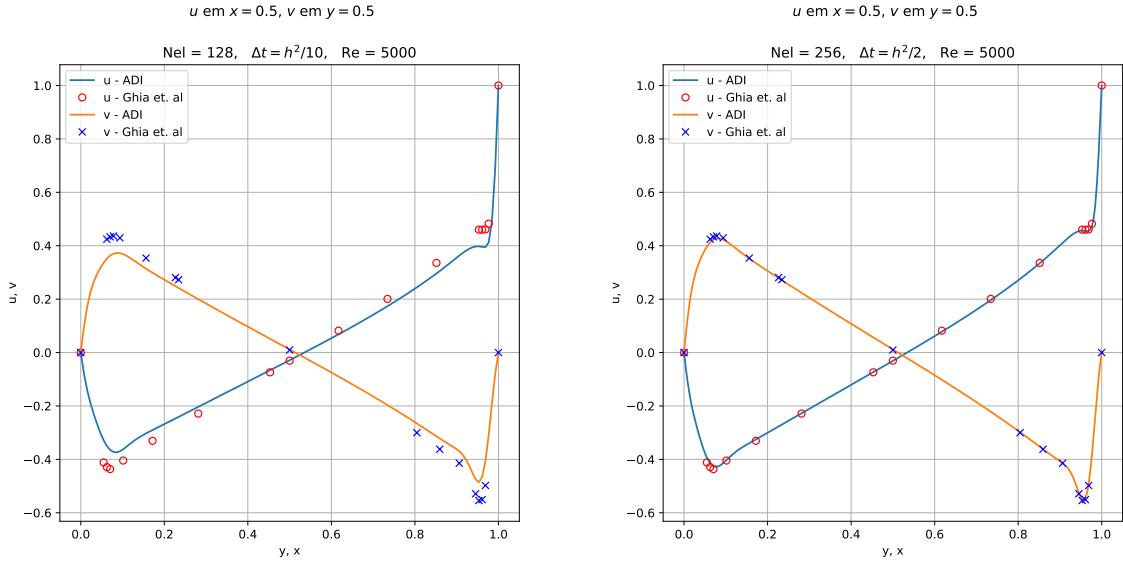
(a) $Nel = 128$, $Re = 5000$, $\Delta t = h^2/10$ (b) $Nel = 256$, $Re = 5000$, $\Delta t = h^2/2$

Figura 4.3: Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 5000$.

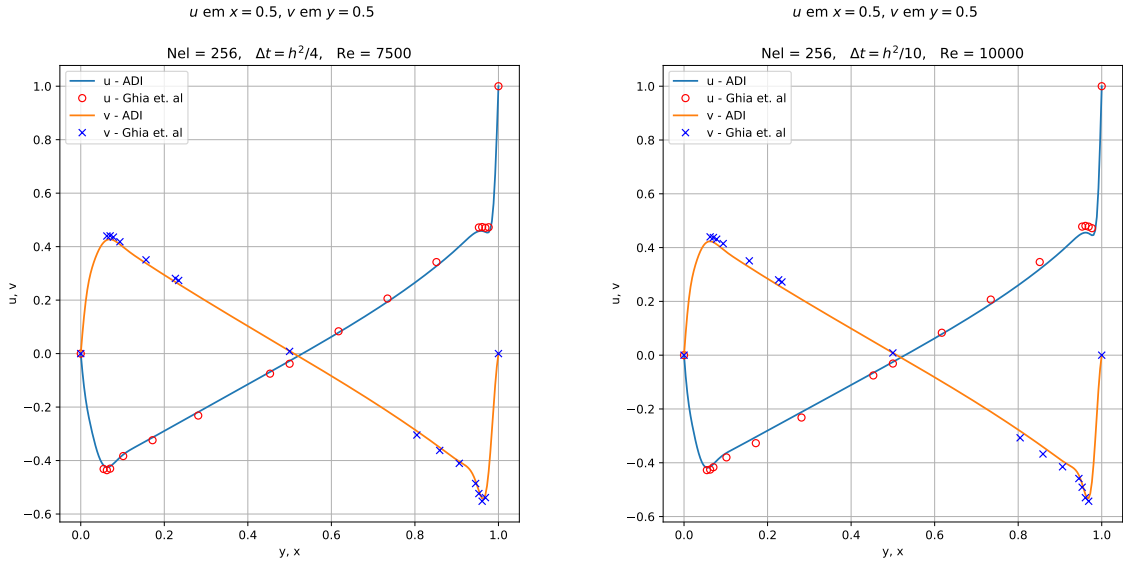
(a) $Nel = 256$, $Re = 7500$, $\Delta t = h^2/4$ (b) $Nel = 256$, $Re = 10000$, $\Delta t = h^2/10$

Figura 4.4: Componentes u e v da velocidade em linhas verticais e horizontais $x = 0.5$ e $y = 0.5$, respectivamente, para $Re = 7500$ e $Re = 10000$. Não foi obtida convergência para $Nel = 128$ elementos.

Pode-se observar a partir das Figuras 4.1-4.4, que os resultados obtidos foram bem próximos do *benchmark* de Ghia, Ghia e Shin (1982). A diferença entre o ADI e esse *benchmark* aumenta quando o número de Reynolds é aumentado. No entanto, isso foi mitigado significativamente usando malhas com o dobro de elementos (257×257 pontos).

O valor de Δt usado não influenciou os resultados nesse respeito. Assim como em Erturk, Corke e Gökçöl (2005), não foi possível obter convergência da solução para $Re > 5000$ usando 129×129 pontos, mas isso foi contornado refinando a malha (ver Fig. 4.4). Além disso, é esperado que usando malhas ainda mais refinadas, os resultados se aproximem ainda mais da literatura e seja possível aumentar ainda mais o número de Reynolds, como em Erturk, Corke e Gökçöl (2005).

As Figuras 4.5-4.7 exibem os contornos da função corrente e da vorticidade, para malhas de 257×257 pontos. É possível observar que, para Reynolds baixo (de 100 a 1000), há a formação de vórtices pequenos nos cantos inferiores da cavidade, além do vórtice principal no centro. O centro deste último é deslocado ligeiramente para cima e para a direita em relação ao centro geométrico da cavidade, devido ao escoamento acima da cavidade. Os vórtices menores aumentam conforme aumenta Re , e para valores do número de Reynolds $Re \geq 2500$, pode-se observar a formação de um quarto vórtice no canto superior esquerdo da cavidade. Esse vórtice também aumenta conforme aumenta o valor de Re . O centro do vórtice principal se move cada vez mais para o centro geométrico da cavidade, conforme aumenta o número de Reynolds. Lembrando que Re equivale à razão entre as forças inerciais e viscosas sobre o fluido, para Reynolds baixo, temos uma predominância dos efeitos viscosos, o que explica o porquê do vórtice principal ser deslocado em relação ao centro da cavidade. Para valores maiores de Re , os efeitos viscosos diminuem, e há a formação dos vórtices secundários.

Em relação à vorticidade, observa-se que as linhas de contorno, assim como para a função corrente, são deslocadas do centro geométrico da cavidade devido ao escoamento na tampa superior. Isso é particularmente verdadeiro para valores de $Re \leq 1000$. Conforme aumenta o número de Reynolds, os contornos da vorticidade se concentram nas bordas da cavidade, evidenciando a predominância dos termos convectivos nas equações governantes.

Pode-se verificar que estes resultados são similares à literatura (GHIA; GHIA; SHIN, 1982; ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005; TÜRK, 2014). Isso confirma que o método ADI é capaz de aproximar de forma precisa os escoamentos de Navier-Stokes, inclusive, para valores elevados do número de Reynolds.

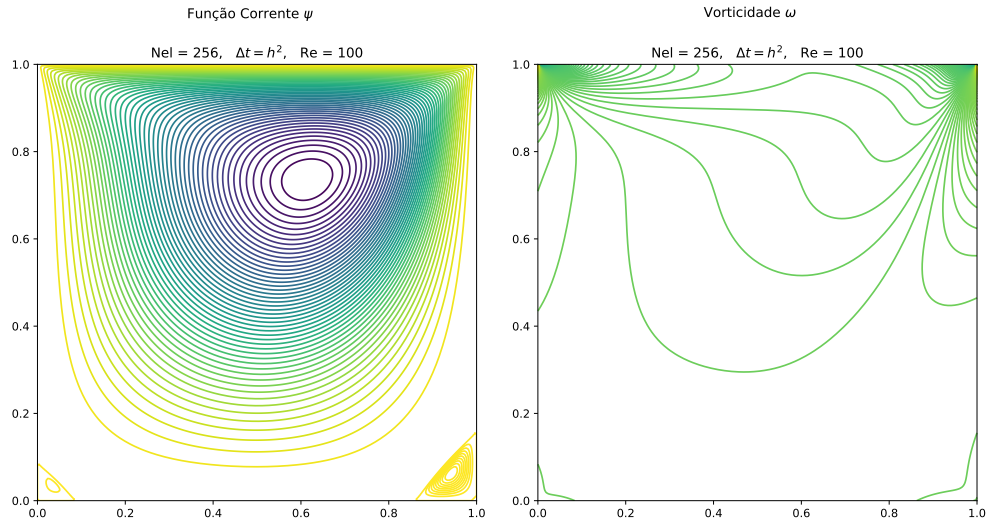
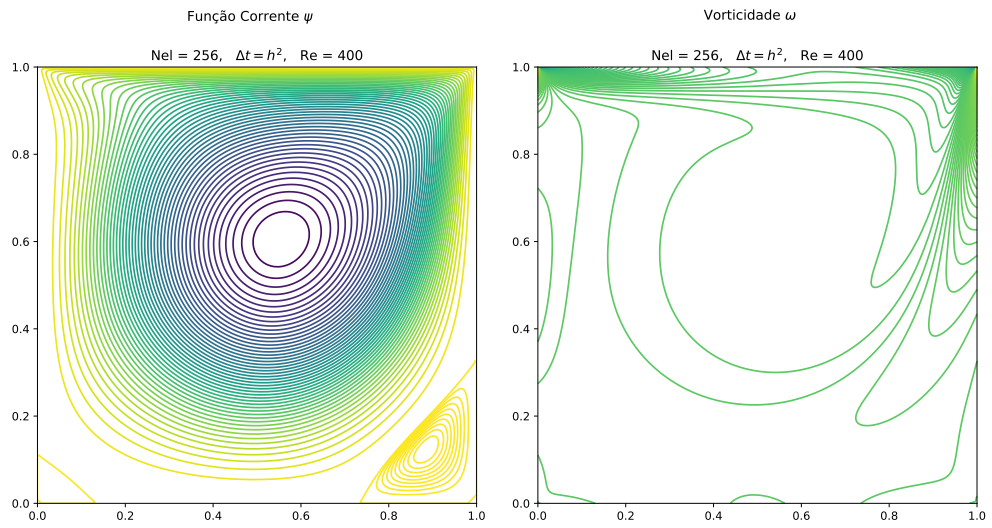
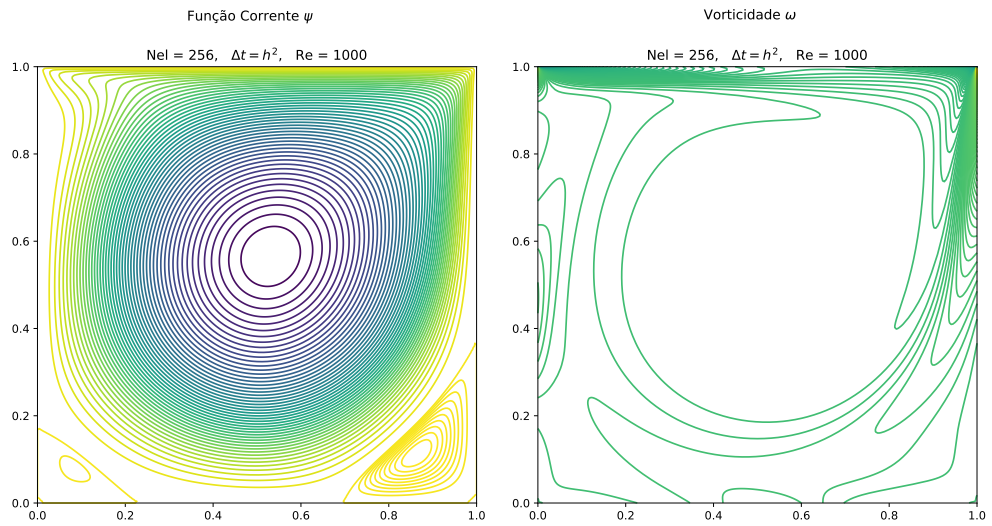
(a) $Re = 100, \Delta t = h^2$ (b) $Re = 400, \Delta t = h^2$ (c) $Re = 1000, \Delta t = h^2$

Figura 4.5: linhas de contorno da função corrente (esquerda) e vorticidade (direita) adotando 256×256 elementos.

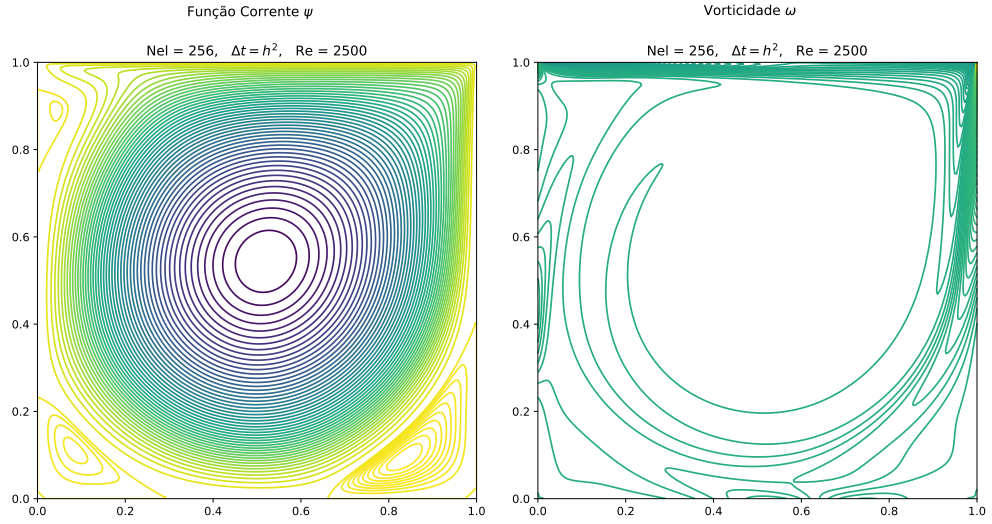
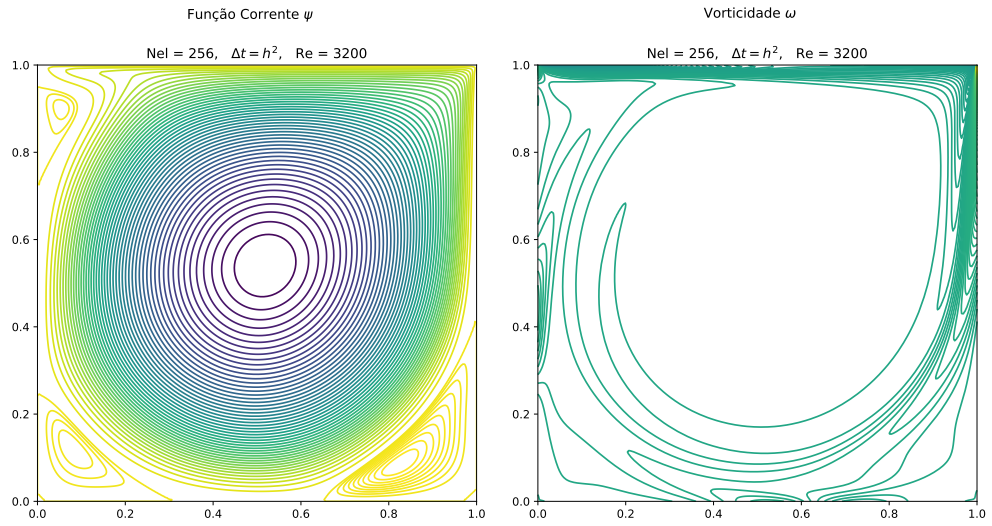
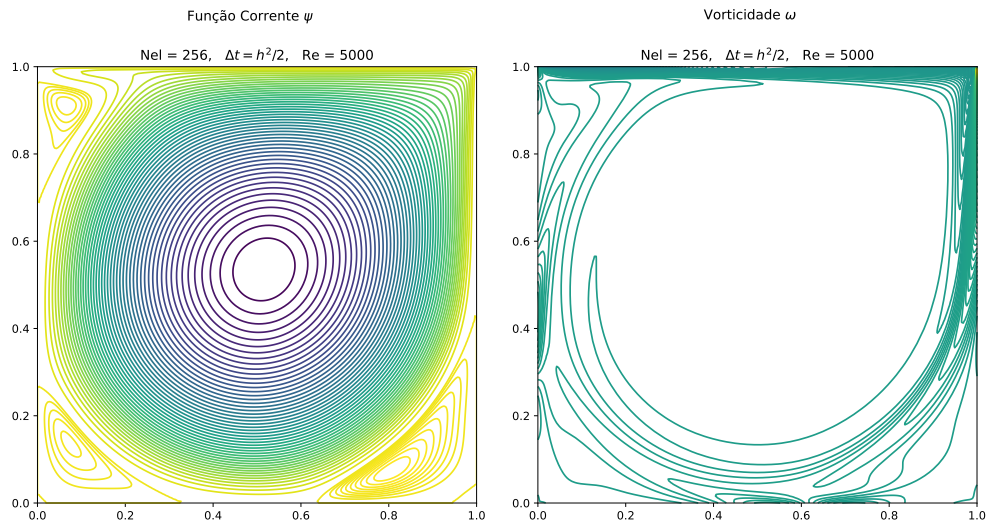
(a) $Re = 2500$, $\Delta t = h^2$ (b) $Re = 3200$, $\Delta t = h^2$ (c) $Re = 5000$, $\Delta t = h^2/2$

Figura 4.6: linhas de contorno da função corrente (esquerda) e vorticidade (direita) adotando 256×256 elementos.

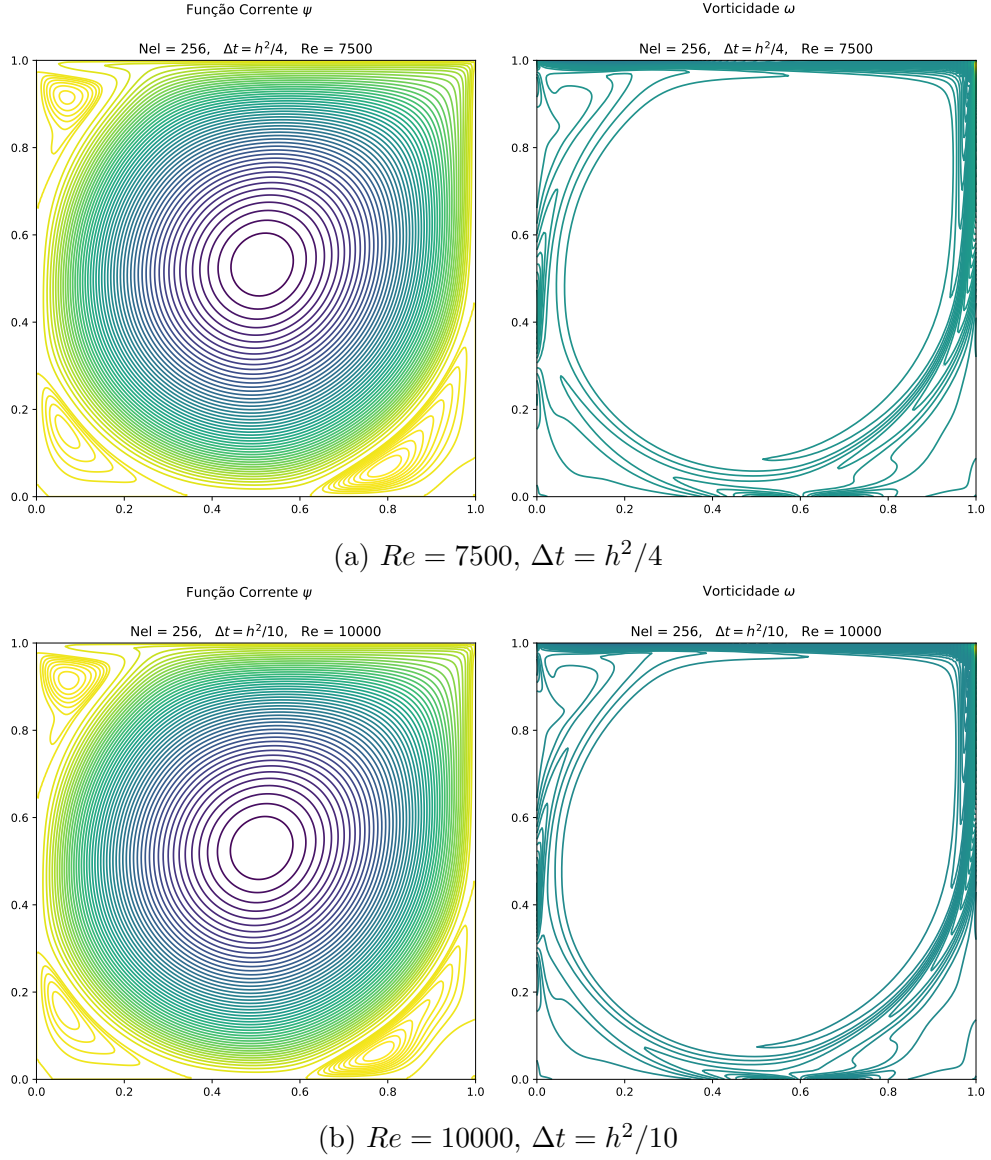


Figura 4.7: linhas de contorno da função corrente (esquerda) e vorticidade (direita) adotando 256×256 elementos.

A Tabela 4.2 compara as propriedades do vórtice primário obtido pelo método ADI (presente) com diversas outras referências, conforme feito em Erturk, Corke e Gökçöl (2005). São mostrados o tamanho da grade computacional, a precisão temporal, o valor absoluto máximo da função corrente, e os valores correspondentes da vorticidade e das coordenadas x e y . Aqui é considerado somente $Re = 1000$. Os resultados obtidos pelo método ADI mostram uma boa concordância com as demais referências da literatura, evidenciando a precisão dessa metodologia para a resolução desse tipo de problema.

Referência	Tamanho da grade	Ordem	$ \psi _{\max}$	$ \omega $	x	y
Presente	129×129	h^2	0.115466	2.018654	0.531250	0.5703125
Presente	257×257	h^2	0.118074	2.055531	0.531250	0.56640625
Erturk, Corke e Gökçöl (2005)	401×401	h^2	0.118585	2.062761	0.5300	0.5650
Erturk, Corke e Gökçöl (2005)	513×513	h^2	0.118722	2.064765	0.5313	0.5645
Erturk, Corke e Gökçöl (2005)	601×601	h^2	0.118781	2.065530	0.5300	0.5650
Barragy e Carey (1997)	257×257	$p = 8$	0.118930	-	-	-
Schreiber e Keller (1983)	100×100	h^2	0.11315	1.9863	-	-
Schreiber e Keller (1983)	121×121	h^2	0.11492	2.0112	-	-
Schreiber e Keller (1983)	141×141	h^2	0.11603	2.0268	0.52857	0.56429
Schreiber e Keller (1983)	Extrapolada	h^6	0.11894	2.0677	-	-
Wright e Gaskell (1995)	1024×1024	h^2	0.118821	2.06337	0.5308	0.5659
Nishida e Satofuka (1992)	129×129	h^8	0.119004	2.068546	0.5313	0.5625
Benjamin e Denny (1979)	101×101	h^2	0.1175	2.044	-	-
Benjamin e Denny (1979)	Extrapolada	Alta ordem	0.1193	2.078	-	-
Li, Tang e Fornberg (1995)	129×129	h^4	0.118448	2.05876	0.5313	0.5625
Ghia, Ghia e Shin (1982)	129×129	h^2	0.117929	2.04968	0.5313	0.5625
Bruneau e Jouron (1990)	256×256	h^2	0.1163	-	0.5313	0.5586
Goyon (1996)	129×129	h^2	0.1157	-	0.5312	0.5625
Vanka (1986)	321×321	h^2	0.1173	-	0.5438	0.5625
Gupta (1991)	41×41	h^4	0.111492	2.02763	0.525	0.575
Hou et al. (1995)	256×256	h^2	0.1178	2.0760	0.5333	0.5647
Liao e Zhu (1996)	129×129	h^2	0.1160	2.0234	0.5313	0.5625
Grigoriev e Dargush (1999)	-	-	0.11925	-	0.531	0.566

Tabela 4.2: Valor máximo absoluto da função corrente, e valores correspondentes da vorticidade e das coordenadas x e y , para $Re = 1000$.

4.2 Convecção Natural

Para o caso da convecção natural em uma cavidade quadrada induzida por diferença térmica entre as paredes da cavidade, foram feitas comparações com Davis (1983), Markatos e Pericleous (1984), Ramaswamy, Jue e Akin (1992), Sai, Seetharamu e Narayana (1994) e Bubnovich et al. (2002). Para isso, estudamos um fluido com número de Prandtl $Pr = 0.71$, em uma cavidade fechada $[0, 1] \times [0, 1]$. Para este problema, a medida relevante é o número de Nusselt, que é computado através da seguinte relação

$$Nu_x(x) = \int_0^1 Q(x, y) dy, \quad (4.2)$$

em que Q é o fluxo de calor em uma direção horizontal em qualquer ponto da cavidade. Sendo u a componente horizontal da velocidade do fluido e T a temperatura, temos

$$Q(x, y) = uT - \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Tendo computado (4.3) usando uma aproximação de segunda ordem para o termo $\partial T/\partial x$, e as relações (4.1) para u , e então (4.2) por integração numérica, podemos calcular as seguintes quantidades relevantes:

$$\bar{Nu} = \int_0^1 Nu_x(x) dx, \quad Nu_0 = Nu_x(0), \quad Nu_{1/2} = Nu_x(0.5). \quad (4.4)$$

Usando, dessa forma, malhas de 81×81 pontos, computamos as seguintes medidas para comparação com a literatura:

- $|\psi|_{\text{mid}}$: o valor absoluto da função corrente no ponto médio da cavidade;
- $|\psi|_{\text{max}}, x, y$: o valor máximo absoluto da função corrente, e as coordenadas correspondentes;
- u_{max}, y : o valor máximo absoluto da componente horizontal u da velocidade do fluido na linha vertical passando pelo centro geométrico da cavidade ($x = 0.5$), e a coordenada y correspondente;
- v_{max}, x : o valor máximo absoluto da componente vertical v da velocidade do fluido na linha horizontal passando pelo centro geométrico da cavidade ($y = 0.5$), e a coordenada x correspondente;
- $\bar{Nu}$: Número de Nusselt médio ao longo da cavidade;
- $Nu_{1/2}$: Número de Nusselt médio na reta vertical que passa pelo ponto médio da cavidade ($x = 0.5$);
- Nu_0 : Número de Nusselt médio na aresta vertical esquerda da cavidade ($x = 0$).

Para os parâmetros α_ψ , α_T e α_ψ , foram usados os valores da Tabela 4.3, seguindo o feito por Costa e Igreja (2020). Na Tabela 4.4 são apresentados os números de iterações

necessárias para a convergência do critério (3.27) utilizando a tolerância $C = 10^{-6}$. A partir desses dados uma comparação do método ADI com Davis (1983) é apresentado nas Tabelas 4.5-4.8. Os resultados mostram, no que diz respeito ao número de Nusselt, que a diferença entre os resultados obtidos pelo método ADI e o *benchmark* Davis (1983) se mantiveram abaixo de 3%. Esse erro aumenta conforme aumentamos o número de Rayleigh. Para valores de $Ra \leq 10^5$, o erro ficou menor do que 1%.

Ra	α_ψ	α_T	α_ω
10^3	1.0	1.0	1.0
10^4	1.0	1.0	1.0
10^5	0.1	0.5	0.5
10^6	0.1	0.5	0.01

Tabela 4.3: Valores dos parâmetros de relaxamento usados, conforme o feito por Costa e Igreja (2020).

Nel	R_a	Δt	Número de iterações
80	10^3	h^2	9672
80	10^4	h^2	11887
80	10^5	h^2	46738
80	10^6	h^2	612058

Tabela 4.4: Número de iterações para todas as simulações executadas. Foi adotado o critério de parada (3.27), com $C = 10^{-6}$. O valor base de Δt usado foi h^2 .

Referência	Presente	Davis (1983)	Erro (%)
$ \psi _{\text{mid}}$	1.176	1.174	0.17
$ \psi _{\text{max}}$	1.176	-	-
x, y	0.500, 0.500	-	-
u_{max}	3.648	3.649	0.027
y	0.813	0.813	-
v_{max}	3.695	3.697	0.054
x	0.175	0.178	-
$\bar{Nu}$	1.118	1.118	0.00
$Nu_{1/2}$	1.118	1.118	0.00
Nu_0	1.118	1.117	0.090

Tabela 4.5: Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^3$.

Referência	Presente	Davis (1983)	Erro (%)
$ \psi _{\text{mid}}$	5.075	5.071	0.79
$ \psi _{\text{max}}$	5.075	-	-
x, y	0.500, 0.500	-	-
u_{max}	16.160	16.178	0.11
y	0.825	0.823	-
v_{max}	19.566	19.617	0.26
x	0.125	0.119	-
$\bar{\text{Nu}}$	2.247	2.243	0.18
$\text{Nu}_{1/2}$	2.244	2.243	0.045
Nu_0	2.249	2.238	0.49

Tabela 4.6: Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^4$.

Referência	Presente	Davis (1983)	Erro (%)
$ \psi _{\text{mid}}$	9.126	9.111	0.16
$ \psi _{\text{max}}$	9.632	9.612	0.21
x, y	0.713, 0.400	0.285, 0.601	-
u_{max}	34.602	34.730	0.37
y	0.150	0.855	-
v_{max}	68.285	68.590	0.44
x	0.9375	0.0066	-
$\bar{\text{Nu}}$	4.543	4.519	0.53
$\text{Nu}_{1/2}$	4.540	4.519	0.46
Nu_0	4.542	4.509	0.73

Tabela 4.7: Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^5$.

Uma comparação adicional foi feita, a respeito do valor máximo da componente vertical v da velocidade do fluido na linha horizontal $x = 0.5$. A Tabela 4.9 mostra os resultados da comparação do presente trabalho com diversos outros da literatura. Pode-se observar que, os resultados ficaram bastante próximos à literatura. Isso indica um bom desempenho dessa abordagem para resolver escoamentos induzidos por convecção natural.

Referência	Presente	Davis (1983)	Erro (%)
$ \psi _{\text{mid}}$	16.541	16.320	1.35
$ \psi _{\text{max}}$	16.974	16.750	1.34
x, y	0.150, 0.550	0.151, 0.547	-
u_{max}	64.635	64.630	0.0077
y	0.85000	0.850	-
v_{max}	218.916	219.360	0.20
x	0.03750	0.0379	-
$\bar{\text{Nu}}$	8.975	8.800	1.99
$\text{Nu}_{1/2}$	8.994	8.799	2.22
Nu_0	8.796	8.817	0.24

Tabela 4.8: Resultados para número de Rayleigh $Ra = 10^6$.

Referência	$Ra = 10^3$	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
Presente	3.695	19.57	68.29	218.916
Davis (1983)	3.697	19.62	68.59	219.36
Markatos e Pericleous (1984)	3.593	19.44	69.08	221.80
Ramaswamy, Jue e Akin (1992)	-	19.62	68.60	221.54
Sai, Seetharamu e Narayana (1994)	3.65	19.65	69.50	226.00
Bubnovich et al. (2002)	3.512	18.917	62.975	203.217

Tabela 4.9: Componente vertical máximo v da velocidade do fluido na linha horizontal $x = 0.5$.

As Figuras em 4.8 exibem os contornos da função corrente, vorticidade, e temperatura, para todos valores de Ra testados. Para $Ra = 10^3$, as forças viscosas dominam o escoamento do fluido. A função corrente e a vorticidade possuem linhas de contorno em padrões circulares, centrados no centro da cavidade, e as linhas isotermais são quase verticais. Conforme o número de Rayleigh cresce, aumentam os efeitos convectivos sobre o escoamento, o que leva a padrões elípticos nos contornos da função corrente. Já os contornos da vorticidade são separados em dois vórtices principais, centrados em torno da diagonal principal da cavidade para $Ra = 10^6$. As isotermais exibem um padrão cada vez mais horizontal. Os resultados são condizentes com a literatura, conforme pode ser atestado em Davis (1983), Lo, Young e Tsai (2007), Bubnovich et al. (2002) e Türk (2014).

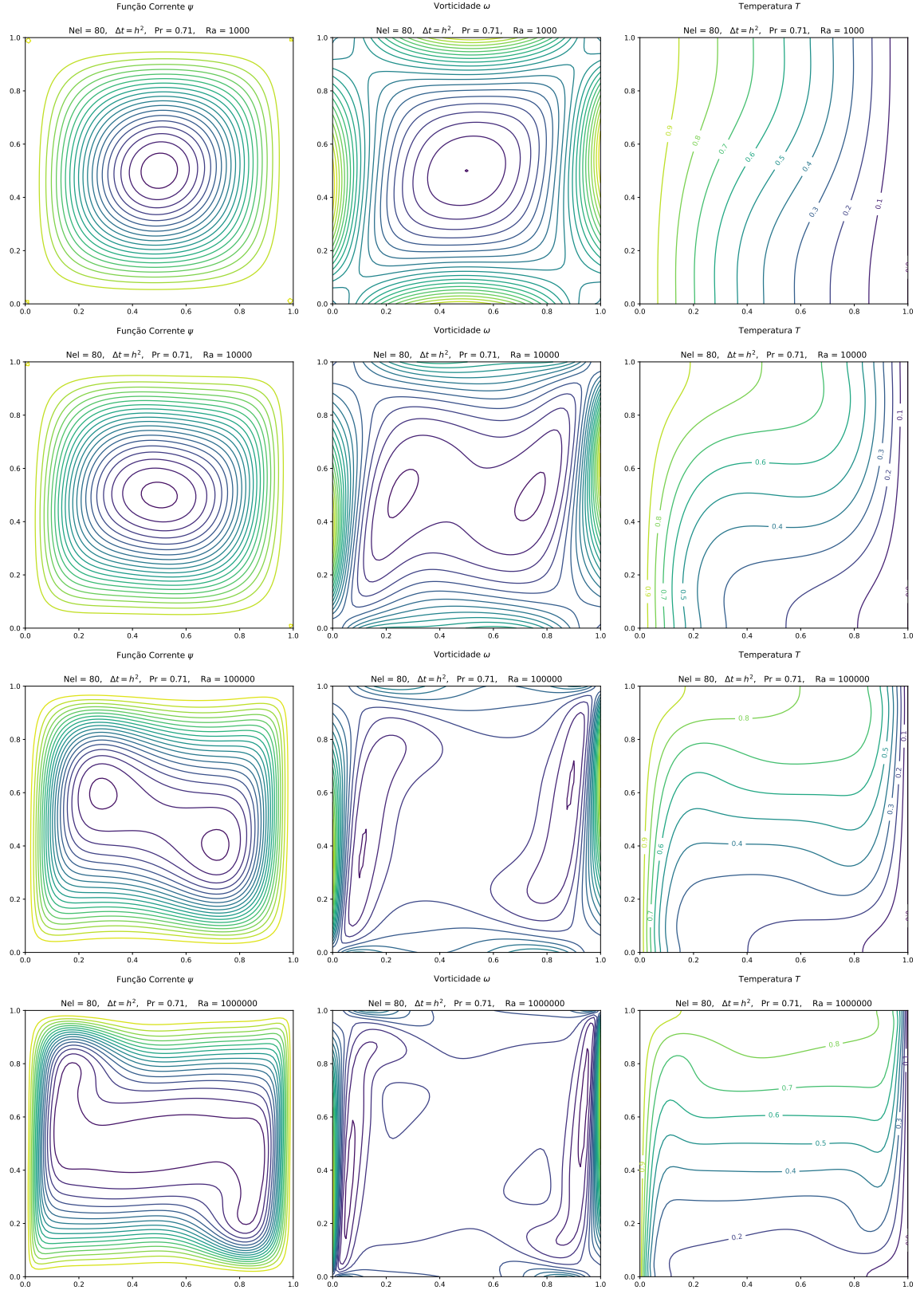


Figura 4.8: Linhas de contorno da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita) para valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).

Esses resultados mostram que o método ADI é eficiente e confiável para a resolução de escoamentos induzidos por convecção natural.

4.3 Convecção natural induzida por efeitos magnéticos

Para o caso do escoamento por convecção natural de um fluido eletrocondutor, induzido por efeitos de um campo magnético externo, foram reproduzidas algumas das simulações feitas por Türk (2014) e Oztop, Oztop e Varol (2009). Para isso, consideramos um fluido com número de Prandtl $Pr = 1.0$. As condições de contorno são como exibidas na Figura 2.3, com $\varphi = 0$, isto é, um campo magnético horizontal à cavidade. Aqui a parede inferior é aquecida de forma senoidal em relação a x , e na parede superior é fixado $T = 0$. As paredes esquerda e direita são fronteiras adiabáticas. Fixamos primeiramente $Nel = 128$ elementos. O critério de parada adotado foi (3.40) com tolerância $C = 10^{-6}$, que exige o número de iterações para convergência conforme descrito na Tabela 4.10. Foram executadas simulações com $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$, e 10^6 . Para cada valor de Ra , a escolha dos parâmetros α_ψ , α_ω , e α_T foi feita como no caso da convecção natural (Tabela 4.3). A tabela 4.10 mostra o número de iterações para todas as simulações executadas, para as quais foi usado sempre $\Delta t = h^2$.

Nel	Ra	Ha	Δt	Número de iterações
128	10^3	0	h^2	22394
128	10^3	10	h^2	21741
128	10^3	50	h^2	18757
128	10^3	100	h^2	16915
128	10^4	0	h^2	26426
128	10^4	10	h^2	21443
128	10^4	50	h^2	22298
128	10^4	100	h^2	20734
128	10^5	0	h^2	75334
128	10^5	10	h^2	79145
128	10^5	50	h^2	56630
128	10^5	100	h^2	46500
128	10^6	0	h^2	602759
128	10^6	10	h^2	792327
128	10^6	50	h^2	168384
128	10^6	100	h^2	473313

Tabela 4.10: Número de iterações para todas as simulações executadas. Foi adotado o critério de parada 3.40, com $C = 10^{-6}$.

As Figuras 4.9-4.11 exibem os contornos da função corrente, vorticidade, e temperatura, para diferentes valores de Ha e Ra . Para um mesmo valor de Ha , conforme aumentamos Ra , as linhas de contorno do fluido se concentram cada vez mais na parede

inferior aquecida, do lado esquerdo, em torno de $x = 0.25$ – onde $\sin(2\pi x) = 1.0$ atinge seu valor máximo.

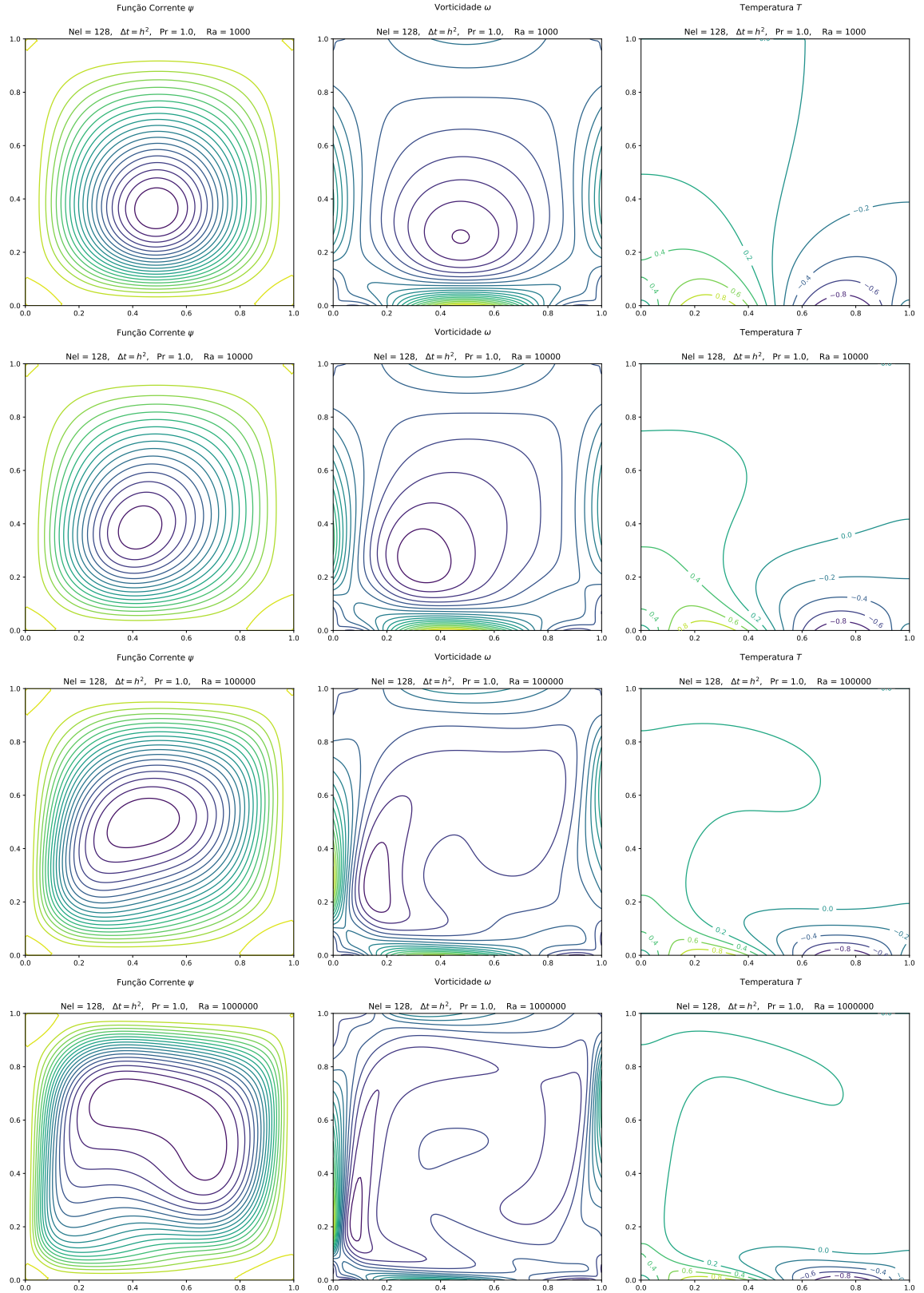


Figura 4.9: Contornos da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita), para $Ha = 10$, e valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).

Já os contornos da vorticidade passam a se desenvolver cada vez mais próximos das paredes adiabáticas da cavidade e as linhas isotermais são “esmagadas” e ficam cada vez mais próximas da parede inferior aquecida.

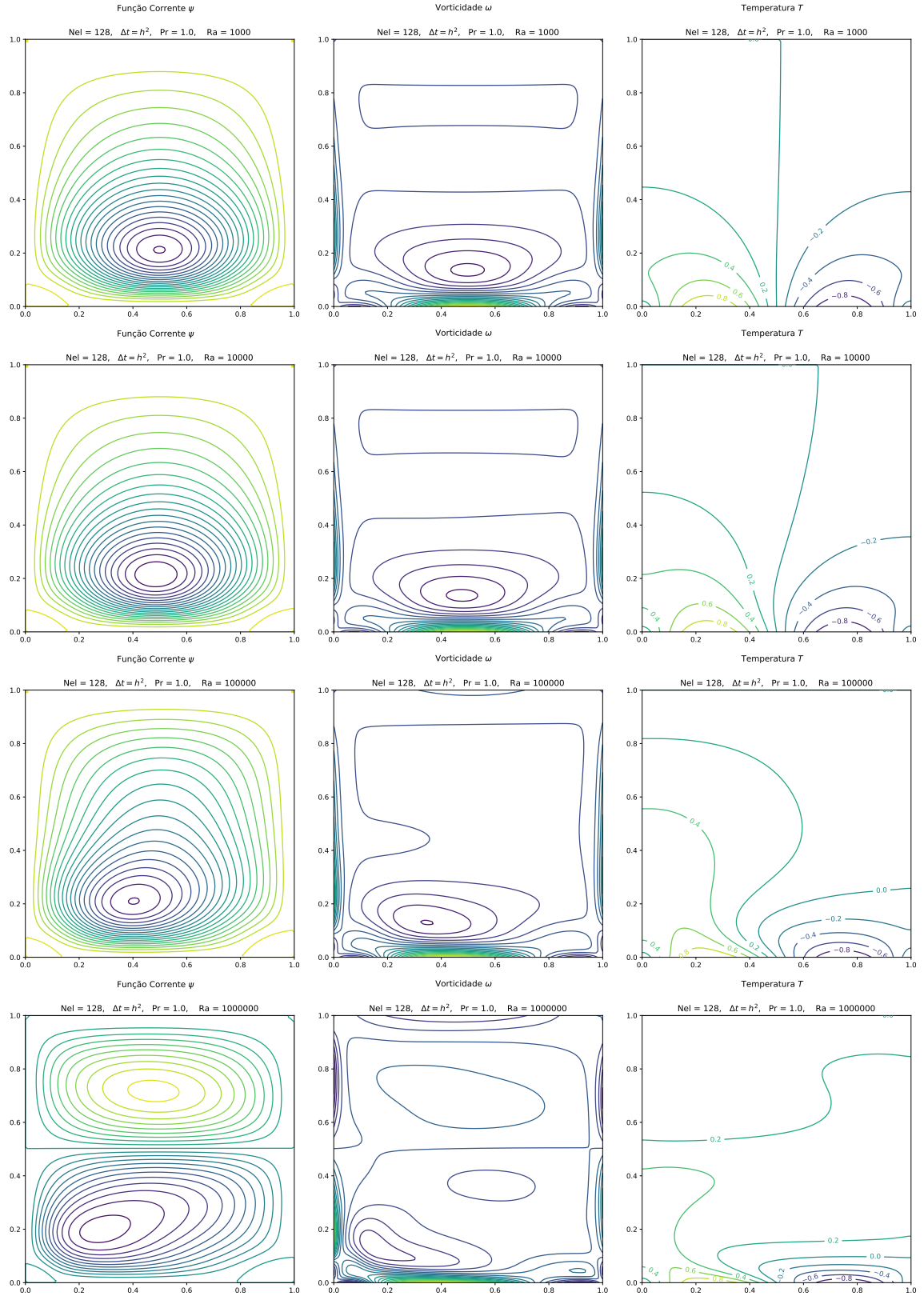


Figura 4.10: Contornos da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita), para $Ha = 50$, e valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).

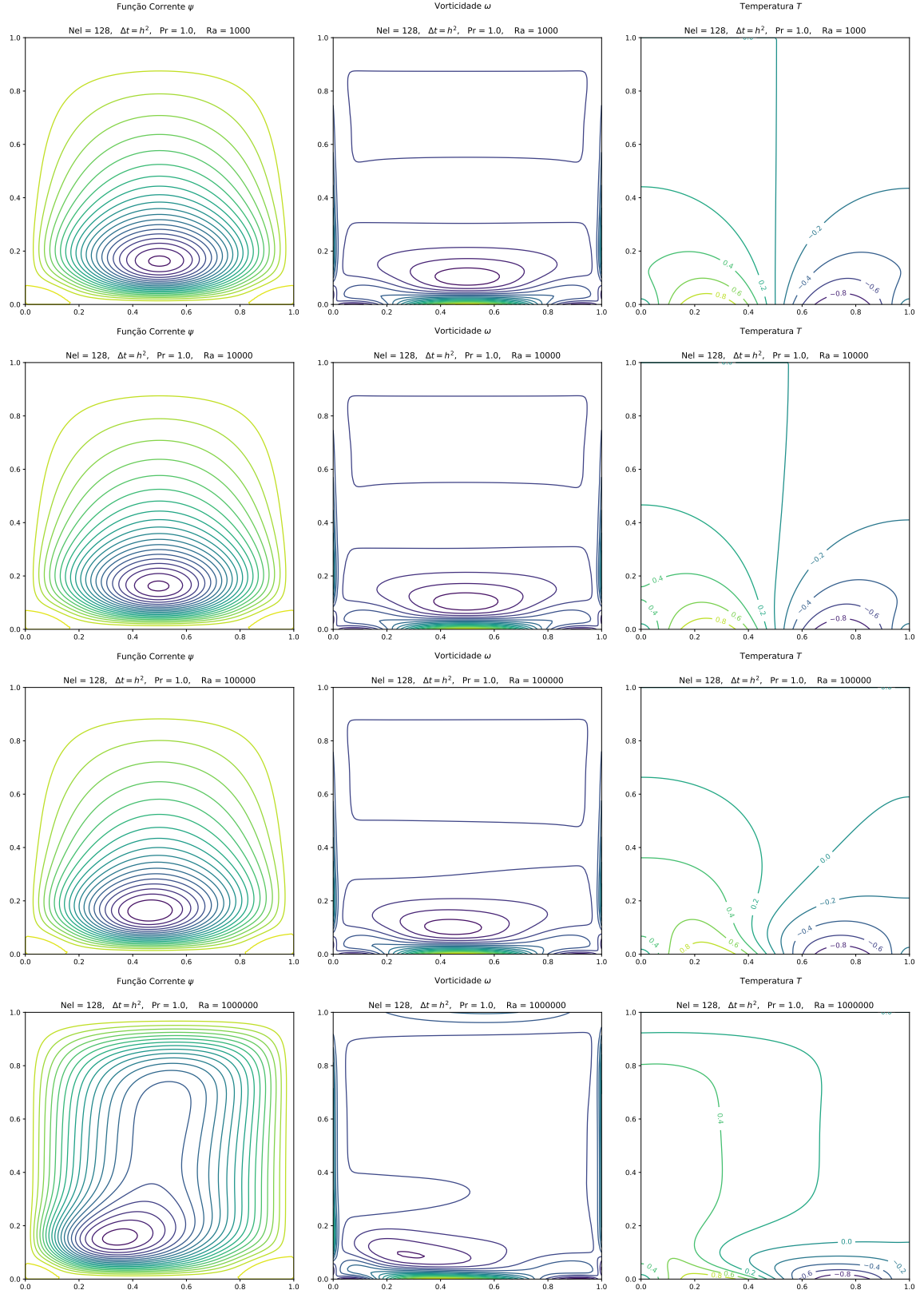


Figura 4.11: Contornos da função corrente (esquerda), vorticidade (meio), e temperatura (direita), para $Ha = 100$, e valores de $Ra = 10^3$ (cima), 10^4 (segunda linha), 10^5 (terceira linha), e 10^6 (última linha).

No caso particular de $Ha = 50$ e $Ra = 10^6$ (Fig. 4.10), as linhas de contorno da função corrente se dividiram em dois vórtices, indicando uma forte influência do campo

magnético externo que incide horizontalmente à cavidade.

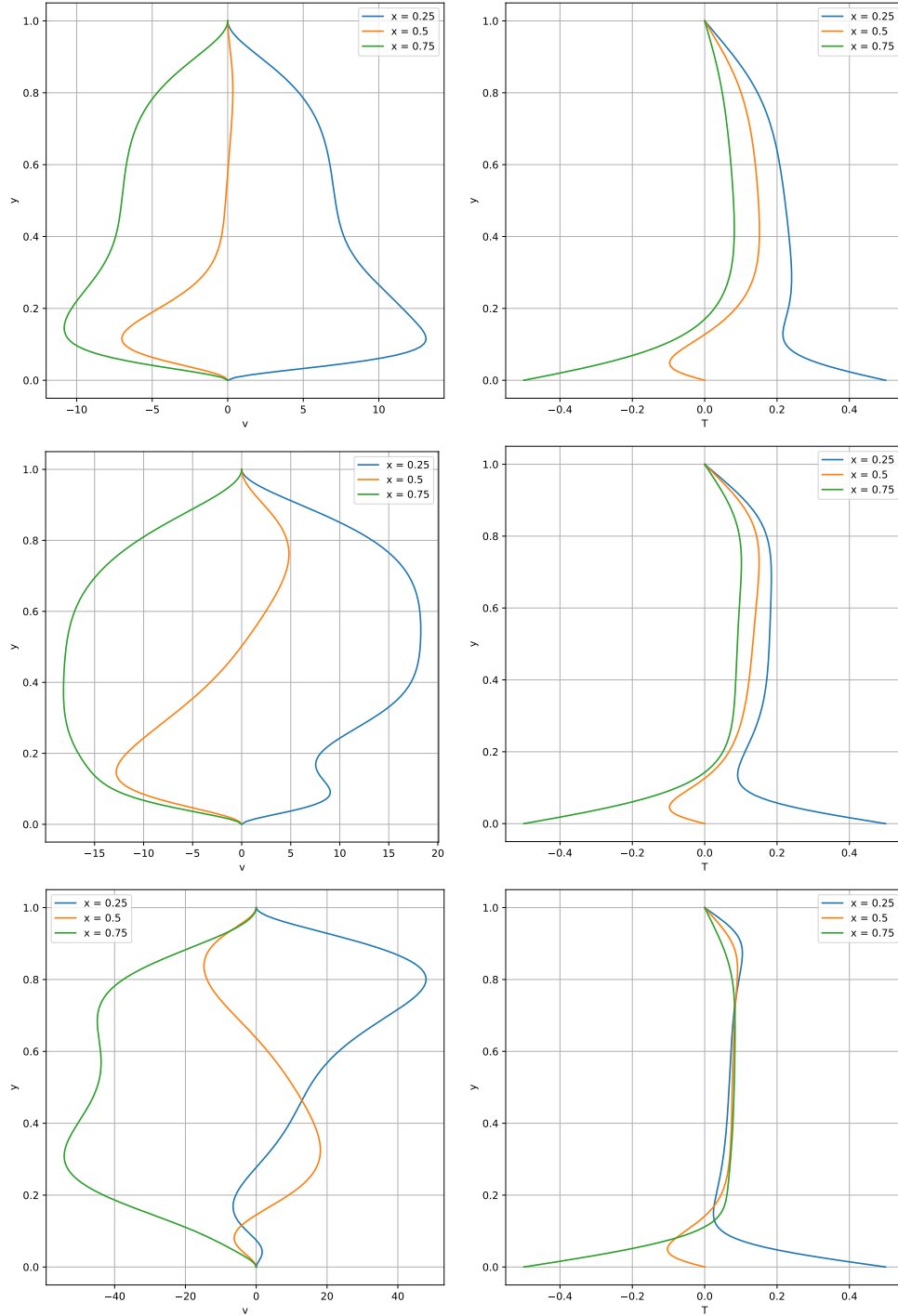


Figura 4.12: Valores da velocidade (esquerda) e temperatura (direita), para $x = 0.25, 0.5, 0.75$. Aqui fixamos $n = 0.5$, $Ra = 10^6$. Temos resultados para $Ha = 100$ (figuras superiores), $Ha = 50$ (meio) e $Ha = 0$, (figuras inferiores).

Das três variáveis de interesse, a temperatura foi a que teve menos alteração visual conforme aumentamos o número de Hartmann – e, conseqüentemente, o efeito das forças eletromagnéticas sobre o fluido. Os resultados se mostraram similares aos de Türk (2014), mostrando a confiabilidade do método ADI para a resolução de escoamentos governados

por efeitos magnetohidrodinâmicos.

Em seguida, estudamos a velocidade e temperatura do fluido em linhas verticais $x = 0.25, 0.5, 0.75$, para diferentes valores de Ha . Isso foi feito com o intuito de reproduzir alguns dos estudos feitos por Oztop, Oztop e Varol (2009). Para esta simulação foi modificada a condição de contorno para a temperatura na parede inferior da cavidade. O contorno inferior da temperatura foi fixado em $T = n \sin(2\pi x)$ (para os resultados anteriores, $n = 1.0$). Fixando $n = 0.5$, $Ra = 10^6$, obtemos os resultados da Figura 4.12, para $Ha = 0, 50, 100$. As maiores velocidades em módulo foram encontradas para $Ha = 0$, e as menores, para $Ha = 100$. Isso mostra o impacto do número de Hartmann como parâmetro definitivo para a velocidade do fluido. Os resultados foram visualmente similares aos de Oztop, Oztop e Varol (2009), reiterando a confiabilidade da abordagem quase transiente via ADI para a resolução de escoamentos desse tipo.

5 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram simulados escoamentos de Navier-Stokes induzidos por efeitos cisalhantes, térmicos, e magnéticos, usando o método de diferenças finitas ADI. O intuito foi verificar a estabilidade e precisão do método para a resolução de escoamentos incompressíveis para diferentes faixas dos números adimensionais de Reynolds, Prandtl, Rayleigh e Hartmann. A resolução de escoamentos estacionários pelo método ADI exige a inclusão de derivadas em relação ao tempo às equações governantes, que tem como vantagem a linearização do sistema através de um processo iterativo de resolução de matrizes tridiagonais. Neste trabalho, convencionamos que o regime estacionário é recuperado quando o valor máximo absoluto relacionado aos resíduos das equações governantes se aproxima de 0.

Para escoamentos induzidos por tensões cisalhantes, foi resolvido o problema *lid-driven cavity flow*, e os resultados foram comparados com o benchmark Ghia, Ghia e Shin (1982), e também foram reproduzidas as comparações com uma literatura extensa, como feito em Erturk, Corke e Gökçöl (2005). Em ambos os casos, o método ADI atingiu resultados próximos à literatura, mostrando o bom desempenho da abordagem estudada.

Para escoamentos induzidos por convecção natural, foi estudado o escoamento em uma cavidade quadrada fechada, induzido por diferença de temperatura entre as paredes da cavidade. Comparações foram feitas com Davis (1983), e foi reproduzido também um dos resultados propostos por Bubnovich et al. (2002). Novamente o método ADI produziu resultados em concordância com a literatura, mostrando a eficácia da abordagem para a resolução de escoamentos por convecção natural.

Para escoamentos de fluidos eletrocondutores induzidos por efeitos magnéticos, foi resolvido o escoamento em uma cavidade quadrada fechada, induzido por efeitos magnéticos. Esse problema foi estudado por Oztop, Oztop e Varol (2009) e Türk (2014). No entanto, os autores desconhecem literatura que trate deste problema, em cavidades quadradas, com a abordagem desenvolvida neste trabalho. Os resultados obtidos foram, mais uma vez, similares à literatura, demonstrando a estabilidade e precisão do método

ADI para a resolução de escoamentos induzidos por efeitos magnetohidrodinâmicos.

Apesar do método ADI ser incondicionalmente estável, isto é, não exige restrições de estabilidade entre Δt e h , a escolha da discretização por diferença central para o termo convectivo – buscando obter precisão de segunda ordem no tempo e no espaço – é reconhecidamente instável para regimes predominantemente convectivos. Contudo, as simulações desenvolvidas nesta monografia foram baseadas em trabalhos da literatura, como Erturk, Corke e Gökçöl (2005), que usam a abordagem numérica e o conjunto de dados similares aos estudados neste trabalho e geram resultados estáveis e convergentes. Para validar matematicamente essa metodologia, seria necessária a análise numérica no sentido de determinar as restrições de escolha do parâmetro de malha h com relação aos coeficientes das equações. Que seja do conhecimento dos autores, isso não foi explorado ainda para os problemas estudados, e pode ser uma direção de trabalhos futuros.

Para trabalhos futuros, é possível ainda seguir outras direções. É possível estudar a implementação do algoritmo de Thomas paralelo em CUDA, como proposto por Souri, Akbarzadeh e Darian (2020), para aumento do desempenho computacional da abordagem estudada. Outra lacuna que pode ser estudada são os valores ótimos dos parâmetros de relaxamento α . Além disso, podemos seguir a direção de generalizar a discretização do escoamento induzido por efeitos magnéticos para incluir outros ângulos de incidência para o campo magnético.

A Tabelas *lid-driven cavity flow*

As tabelas a seguir exibem os resultados explicitados no Capítulo 4, seção 4.1 em forma de figuras. São descritos os valores das componentes u e v da velocidade do fluido, passando por linhas verticais $x = 0.5$ e horizontais $y = 0.5$. Os resultados são exibidos ao lados dos resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982), e é possível verificar a proximidade com a literatura.

129- grid pt. no.	y	R_e					
		100		400			
		Ghia et al.	ADI $\Delta t = h^2$	Ghia et al.	ADI $\Delta t = h^2$	Ghia et al.	ADI $\Delta t = h^2$
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	0.0547	-0.03717	-0.03707	-0.08186	-0.07917	-0.08186	-0.07917
9	0.0625	-0.04192	-0.04180	-0.09266	-0.08966	-0.09266	-0.08966
10	0.0703	-0.04775	-0.04644	-0.10338	-0.10009	-0.10338	-0.10009
14	0.1016	-0.06434	-0.06415	-0.14612	-0.14183	-0.14612	-0.14183
23	0.1719	-0.10150	-0.10133	-0.24299	-0.23763	-0.24299	-0.23763
37	0.2813	-0.15662	-0.15705	-0.32726	-0.32445	-0.32726	-0.32445
59	0.4531	-0.21090	-0.21337	-0.17119	-0.17220	-0.17119	-0.17220
65	0.5000	-0.20581	-0.20867	-0.11477	-0.11590	-0.11477	-0.11590
80	0.6172	-0.13641	-0.13880	0.02135	0.01981	0.02135	0.01981
95	0.7344	0.00332	0.00375	0.16256	0.01603	0.16256	0.01603
110	0.8516	0.23151	0.23571	0.29093	0.28830	0.29093	0.28830
123	0.9531	0.68717	0.69055	0.55892	0.55670	0.55892	0.55670
124	0.9609	0.73722	0.74015	0.61756	0.61546	0.61756	0.61546
125	0.9688	0.78871	0.79114	0.68439	0.68249	0.68439	0.68249
126	0.9766	0.84123	0.84311	0.75837	0.75677	0.75837	0.75677
129	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

129- grid pt. no.	y	R_e					
		1000		3200		5000	
		Ghia et al.	ADI $\Delta t = h^2$	Ghia et al.	ADI $\Delta t = \frac{h^2}{4}$	Ghia et al.	ADI $\Delta t = \frac{h^2}{10}$
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	0.0547	-0.18109	-0.16962	-0.32407	-0.30224	-0.41165	-0.32816
9	0.0625	-0.20196	-0.18960	-0.35344	-0.32886	-0.42901	-0.35002
10	0.0703	-0.22220	-0.20919	-0.37827	-0.35137	-0.43643	-0.36483
14	0.1016	-0.29730	-0.28352	-0.41933	-0.38928	-0.40435	-0.36224
23	0.1719	-0.38289	-0.37532	-0.34323	-0.31645	-0.33050	-0.29014
37	0.2813	-0.27805	-0.27622	-0.24427	-0.22180	-0.22855	-0.20334
59	0.4531	-0.10648	-0.10676	-0.86636	-0.07500	-0.07404	-0.06642
65	0.5000	-0.06080	-0.06175	-0.04272	-0.03469	-0.03039	-0.02873
80	0.6172	0.05702	0.05453	0.07156	0.06908	0.08183	0.06822
95	0.7344	0.18719	0.18309	0.19791	0.18220	0.20087	0.17357
110	0.8516	0.33304	0.32681	0.34682	0.31485	0.33556	0.29600
123	0.9531	0.46604	0.45668	0.46101	0.40991	0.46036	0.39765
124	0.9609	0.51117	0.50125	0.46547	0.41236	0.45992	0.39567
125	0.9688	0.57492	0.56487	0.48296	0.42642	0.46120	0.39487
126	0.9766	0.65928	0.65000	0.53236	0.47215	0.48223	0.41200
129	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Tabela A.1: Valores da componente u da velocidade ao longo da linha vertical passando pelo centro geométrico de gravidade ($x = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 128×128 elementos (ou 129×129 pontos), mesmo refinamento utilizado por *Ghia et al.*. Foram testados diferentes valores de R_e .

129- grid pt. no.	x	R_e			
		100		400	
		Ghia et al.	ADI $\Delta t = h^2$	Ghia et al.	ADI $\Delta t = h^2$
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	0.0625	0.09233	0.09438	0.18360	0.18120
10	0.0703	0.10091	0.10313	0.19713	0.19465
11	0.0781	0.10890	0.11128	0.20920	0.20665
13	0.0938	0.12317	0.12583	0.22965	0.22701
21	0.1563	0.16077	0.16413	0.28124	0.27830
30	0.2266	0.17507	0.17867	0.30203	0.29908
31	0.2344	0.17527	0.17888	0.30174	0.29883
65	0.5000	0.05454	0.05739	0.05186	0.05261
104	0.8047	-0.24533	-0.25260	-0.38598	-0.38249
111	0.8594	-0.22445	-0.23289	-0.44993	-0.44767
117	0.9063	-0.16914	-0.17657	-0.23827	-0.38258
122	0.9453	-0.10313	-0.10817	-0.22847	-0.22952
123	0.9531	-0.08864	-0.09305	-0.19254	-0.19363
124	0.9609	-0.07391	-0.07766	-0.15663	-0.15769
125	0.9688	-0.05906	-0.06210	-0.12146	-0.12242
129	1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

129- grid pt. no.	x	R_e					
		1000		3200		5000	
		Ghia et al.	ADI $\Delta t = h^2$	Ghia et al.	ADI $\Delta t = \frac{h^2}{4}$	Ghia et al.	ADI $\Delta t = \frac{h^2}{10}$
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	0.0625	0.27485	0.26766	0.39560	0.34415	0.42447	0.35177
10	0.0703	0.29012	0.28276	0.40917	0.35869	0.43329	0.36298
11	0.0781	0.30353	0.29601	0.41906	0.37019	0.43648	0.36988
13	0.0938	0.32627	0.31840	0.42768	0.38356	0.42951	0.37196
21	0.1563	0.37095	0.36328	0.37119	0.34466	0.35368	0.31404
30	0.2266	0.33075	0.32581	0.29030	0.27040	0.28066	0.24872
31	0.2344	0.32235	0.31769	0.28188	0.26280	0.27280	0.24170
65	0.5000	0.02526	0.02596	0.00999	0.01431	0.00945	0.01151
104	0.8047	-0.31966	-0.31250	-0.31184	-0.28480	-0.30018	-0.26540
111	0.8594	-0.42665	-0.41869	-0.37401	-0.34311	-0.36214	-0.32180
117	0.9063	-0.51550	-0.51002	-0.44307	-0.41051	-0.41122	-0.36957
122	0.9453	-0.39188	-0.39027	-0.54053	-0.51038	-0.52876	-0.47500
123	0.9531	-0.33714	-0.33678	-0.52357	-0.49401	-0.55408	-0.48528
124	0.9609	-0.27669	-0.27748	-0.47425	-0.44786	-0.55069	-0.46623
125	0.9688	-0.21388	-0.21549	-0.39017	-0.37166	-0.49774	-0.40710
129	1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela A.2: Valores da componente v da velocidade ao longo da linha horizontal passando pelo centro geométrico de gravidade ($y = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 128×128 elementos (ou 129×129 pontos), mesmo refinamento utilizado por *Ghia et al.*. Foram testados diferentes valores de R_e .

129- grid pt. no.	257- grid pt. no.	y	R_e							
			100		400		1000			
			Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI
			et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = h^2$
1	1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	15	0.0547	-0.03717	-0.03718	-0.08186	-0.08115	-0.18109	-0.17830	-0.18109	-0.17830
9	17	0.0625	-0.04192	-0.04193	-0.09266	-0.09187	-0.20196	-0.19910	-0.20196	-0.19910
10	19	0.0703	-0.04775	-0.04658	-0.10338	-0.10251	-0.22220	-0.21945	-0.22220	-0.21945
14	27	0.1016	-0.06434	-0.06435	-0.14612	-0.14507	-0.29730	-0.29612	-0.29730	-0.29612
23	45	0.1719	-0.10150	-0.10163	-0.24299	-0.24223	-0.38289	-0.38531	-0.38289	-0.38531
37	73	0.2813	-0.15662	-0.15750	-0.32726	-0.32767	-0.27805	-0.27938	-0.27805	-0.27938
59	117	0.4531	-0.21090	-0.21383	-0.17119	-0.17164	-0.10648	-0.10784	-0.10648	-0.10784
65	129	0.5000	-0.20581	-0.20903	-0.11477	-0.11526	-0.06080	-0.06199	-0.06080	-0.06199
80	159	0.6172	-0.13641	-0.13881	0.02135	0.02072	0.05702	0.05638	0.05702	0.05638
95	189	0.7344	0.00332	0.00405	0.16256	0.16199	0.18719	0.18725	0.18719	0.18725
110	219	0.8516	0.23151	0.23626	0.29093	0.29108	0.33304	0.33459	0.33304	0.33459
123	245	0.9531	0.68717	0.69103	0.55892	0.56051	0.46604	0.46856	0.46604	0.46856
124	247	0.9609	0.73722	0.74057	0.61756	0.61906	0.51117	0.51326	0.51117	0.51326
125	249	0.9688	0.78871	0.79149	0.68439	0.68572	0.57492	0.57657	0.57492	0.57657
126	251	0.9766	0.84123	0.84339	0.75837	0.75945	0.65928	0.66056	0.65928	0.66056
129	257	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

129- grid pt. no.	257- grid pt. no.	y	R_e							
			3200		5000		7500		10000	
			Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI
			et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = \frac{h^2}{2}$	et al.	$\Delta t = \frac{h^2}{4}$	et al.	$\Delta t = \frac{h^2}{10}$
1	1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	15	0.0547	-0.32407	-0.34221	-0.41165	-0.39326	-0.43154	-0.41792	-0.42735	-0.41846
9	17	0.0625	-0.35344	-0.37059	-0.42901	-0.41405	-0.43590	-0.42487	-0.42537	-0.41518
10	19	0.0703	-0.37827	-0.39349	-0.43643	-0.42515	-0.43025	-0.42165	-0.41657	-0.40485
14	27	0.1016	-0.41933	-0.42190	-0.40435	-0.40278	-0.38324	-0.37791	-0.38000	-0.36341
23	45	0.1719	-0.34323	-0.33787	-0.33050	-0.32543	-0.32393	-0.31388	-0.32709	-0.30417
37	73	0.2813	-0.24427	-0.23718	-0.22855	-0.22736	-0.23176	-0.21853	-0.23186	-0.21164
59	117	0.4531	-0.86636	-0.07958	-0.07404	-0.07348	-0.07503	-0.06880	-0.07540	-0.06566
65	129	0.5000	-0.04272	-0.03630	-0.03039	-0.03113	-0.03800	-0.02752	0.03111	-0.02536
80	159	0.6172	0.07156	0.07511	0.08183	0.07783	0.08342	0.07864	0.08344	0.07821
95	189	0.7344	0.19791	0.19670	0.20087	0.19634	0.20591	0.19374	0.20673	0.19027
110	219	0.8516	0.34682	0.33944	0.33556	0.33432	0.34228	0.32717	0.34635	0.31976
123	245	0.9531	0.46101	0.44810	0.46036	0.45664	0.47167	0.45781	0.47804	0.45250
124	247	0.9609	0.46547	0.45137	0.45992	0.45558	0.47323	0.45856	0.48070	0.45564
125	249	0.9688	0.48296	0.46648	0.46120	0.45545	0.47048	0.45464	0.47783	0.45290
126	251	0.9766	0.53236	0.51291	0.48223	0.47335	0.47244	0.45348	0.47221	0.44568
129	257	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Tabela A.3: Valores da componente u da velocidade ao longo da linha vertical passando pelo centro geométrico de gravidade ($x = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 256×256 elementos (ou 257×257 pontos), e comparados com *Ghia et al.*, que utilizaram malhas de 128×128 elementos. Foram testados diferentes valores de R_e .

129- grid pt. no.	257- grid pt. no.	x	R_e							
			100		400		1000			
			Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI
			et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = h^2$
1	1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	17	0.0625	0.09233	0.09470	0.18360	0.18416	0.27485	0.27744	0.27485	0.27744
10	19	0.0703	0.10091	0.10348	0.19713	0.19778	0.29012	0.29291	0.29012	0.29291
11	21	0.0781	0.10890	0.11165	0.20920	0.20993	0.30353	0.30647	0.30353	0.30647
13	25	0.0938	0.12317	0.12625	0.22965	0.23051	0.32627	0.32933	0.32627	0.32933
21	41	0.1563	0.16077	0.16464	0.28124	0.28223	0.37095	0.37353	0.37095	0.37353
30	59	0.2266	0.17507	0.17919	0.30203	0.30265	0.33075	0.33200	0.33075	0.33200
31	61	0.2344	0.17527	0.17939	0.30174	0.30231	0.32235	0.32348	0.32235	0.32348
65	129	0.5000	0.05454	0.05750	0.05186	0.05219	0.02526	0.02584	0.02526	0.02584
104	207	0.8047	-0.24533	-0.25331	-0.38598	-0.38486	-0.31966	-0.31827	-0.31966	-0.31827
111	221	0.8594	-0.22445	-0.23351	-0.44993	-0.45231	-0.42665	-0.42450	-0.42665	-0.42450
117	233	0.9063	-0.16914	-0.17701	-0.23827	-0.38803	-0.51550	-0.52236	-0.51550	-0.52236
122	243	0.9453	-0.10313	-0.10842	-0.22847	-0.23339	-0.39188	-0.40525	-0.39188	-0.40525
123	245	0.9531	-0.08864	-0.09327	-0.19254	-0.19698	-0.33714	-0.35049	-0.33714	-0.35049
124	247	0.9609	-0.07391	-0.07784	-0.15663	-0.16049	-0.27669	-0.28935	-0.27669	-0.28935
125	249	0.9688	-0.05906	-0.06225	-0.12146	-0.12464	-0.21388	-0.22508	-0.21388	-0.22508
129	257	1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

129- grid pt. no.	257- grid pt. no.	x	R_e							
			3200		5000		7500		10000	
			Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI	Ghia	ADI
			et al.	$\Delta t = h^2$	et al.	$\Delta t = \frac{h^2}{2}$	et al.	$\Delta t = \frac{h^2}{4}$	et al.	$\Delta t = \frac{h^2}{10}$
1	1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	17	0.0625	0.39560	0.38235	0.42447	0.41203	0.43979	0.42504	0.43983	0.42319
10	19	0.0703	0.40917	0.39740	0.43329	0.42215	0.44030	0.42736	0.43733	0.41979
11	21	0.0781	0.41906	0.40872	0.43648	0.42683	0.43564	0.42422	0.43124	0.41231
13	25	0.0938	0.42768	0.41996	0.42951	0.42281	0.41824	0.40845	0.41487	0.39308
21	41	0.1563	0.37119	0.36878	0.35368	0.35162	0.35060	0.33784	0.35070	0.32691
30	59	0.2266	0.29030	0.28974	0.28066	0.27067	0.28117	0.26767	0.28003	0.25889
31	61	0.2344	0.28188	0.28157	0.27280	0.01179	0.27348	0.26003	0.27224	0.25149
65	129	0.5000	0.00999	0.01432	0.00945	0.01179	0.00824	0.00992	0.00831	0.00875
104	207	0.8047	-0.31184	-0.30615	-0.30018	-0.29838	-0.30448	-0.28976	-0.30719	-0.28205
111	221	0.8594	-0.37401	-0.36947	-0.36214	-0.36197	-0.36213	-0.35095	-0.36737	-0.34109
117	233	0.9063	-0.44307	-0.43478	-0.41442	-0.41376	-0.41050	-0.40351	-0.41496	-0.39368
122	243	0.9453	-0.54053	-0.55298	-0.52876	-0.52461	-0.48590	-0.47715	-0.45863	-0.44613
123	245	0.9531	-0.52357	-0.54397	-0.55408	-0.54921	-0.52347	-0.51396	-0.49099	-0.47840
124	247	0.9609	-0.47425	-0.50118	-0.55069	-0.54479	-0.55216	-0.54207	-0.52987	-0.51758
125	249	0.9688	-0.39017	-0.42186	-0.49774	-0.49143	-0.53858	-0.52818	-0.54302	-0.53181
129	257	1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela A.4: Valores da componente v da velocidade ao longo da linha horizontal passando pelo centro geométrico de gravidade ($y = 0.5$). Os resultados exibidos foram obtidos usando malhas de 256×256 elementos (ou 257×257 pontos), e comparados com *Ghia et al.*, que utilizaram malhas de 128×128 elementos. Foram testados diferentes valores de R_e .

Bibliografia

BARRAGY, E.; CAREY, G. Stream function-vorticity driven cavity solutions using p finite elements. *Computers and Fluids*, v. 26, p. 453–468, 1997.

BENJAMIN, A.; DENNY, V. On the convergence of numerical solutions for 2-d flows in a cavity at large re. *Journal of Computational Physics*, v. 33, p. 340–358, 1979.

BOUILLOT, P. et al. Particle imaging velocimetry evaluation of intracranial stents in sidewall aneurysm: Hemodynamic transition related to the stent design. *PLoS ONE*, v. 9, n. 12, 2014.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1, p. 199–259, 1982. ISSN 0045-7825.

BRUNEAU, C.-H.; JOURON, C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 89, n. 2, p. 389–413, 1990. ISSN 0021-9991.

BUBNOVICH, V. et al. Computation of transient natural convection in a square cavity by an implicit finite-difference scheme in terms of the stream function and temperature. *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, Taylor & Francis, v. 42, n. 4, p. 401–425, 2002.

COSTA, R. P. S.; IGREJA, I. Um método implícito de direções alternadas aplicado à solução do problema de convecção natural. *Anais do XXIII ENMC – Encontro Nacional de Modelagem Computacional*, 2020.

DAVIS, G. de V. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *International Journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 3, n. 3, p. 249–264, 1983.

ERTURK, E.; CORKE, T.; GÖKÇÖL, C. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 48, p. 747–774, 2005.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002. ISBN 978-3-540-42074-3.

FRANCA, L. P.; FREY, S. L. Stabilized finite element methods: II. the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 99, n. 2, p. 209–233, 1992. ISSN 0045-7825.

GARANDET, J. P.; ALBOUSSIÈRE, T.; MOREAU, R. Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 35, p. 741–748, 1992.

GHIA, U.; GHIA, K.; SHIN, C. High-Re solutions for incompressible flow using the navier–stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–411, 1982.

GOYON, O. High-Reynolds number solutions of navier-stokes equations using incremental unknowns. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 130, n. 3-4, p. 319–335, 1996.

GRIEBEL, M.; DORNSHEIFER, T.; NEUNHOEFFER, T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. (Monographs on Mathematical Modeling and Computation). ISBN 978-0-89871-398-5.

GRIGORIEV, M.; DARGUSH, G. A poly-region boundary element method for incompressible viscous fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 46, n. 7, p. 1127–1158, 1999.

GUPTA, M. M. High accuracy solutions of incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 93, n. 2, p. 343–359, 1991.

HOU, S. et al. Simulation of cavity flow by the Lattice Boltzmann method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 118, n. 2, p. 329–347, 1995.

KAKARANTZAS, S. et al. Magnetohydrodynamic natural convection in a vertical cylindrical cavity with sinusoidal upper wall temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, p. 250–259, 2009.

LI, M.; TANG, T.; FORNBERG, B. A compact fourth-order finite difference scheme for the steady incompressible navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 20, n. 10, p. 1137–1151, 1995.

LIAO, S. Higher-order stream function-vorticity formulation of 2-d steady state Navier–Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 15, p. 595–612, 1992.

LIAO, S.-J.; ZHU, J.-M. A short note on high-order streamfunction–vorticity formulations of 2d steady state Navier–Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 22, n. 1, p. 1–9, 1996.

LO, D.; YOUNG, D.; TSAI, C. High resolution of 2d natural convection in a cavity by the dq method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 203, n. 1, p. 219–236, 2007. ISSN 0377-0427.

MARKATOS, N.; PERICLEOUS, K. Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 27, n. 5, p. 755–772, 1984. ISSN 0017-9310.

NISHIDA, H.; SATOFUKA, N. Higher-order solutions of square driven cavity flow using a variable-order multi-grid method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 34, n. 2, p. 637–653, 1992.

OZTOP, H. F.; OZTOP, M.; VAROL, Y. Numerical simulation of magnetohydrodynamic buoyancy-induced flow in a non-isothermally heated square enclosure. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 14, n. 3, p. 770–778, 2009. ISSN 1007-5704.

- PATANKAR, S.; SPALDING, D. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 15, n. 10, p. 1787–1806, 1972. ISSN 0017-9310.
- PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. [S.l.]: Hemisphere, 1980.
- PEACEMAN, D. W.; RACHFORD, H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, p. 28–41, 1955.
- RAMASWAMY, B.; JUE, T. C.; AKIN, J. E. Semi-implicit and explicit finite element schemes for coupled fluid/thermal problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 34, n. 2, p. 675–696, 1992.
- ROY, S.; BASAK, T. Finite element analysis of natural convection flows in a square cavity with non-uniformly heated wall(s). *International Journal of Engineering Science*, v. 43, p. 668–680, 2005.
- SAI, B. V. K. S.; SEETHARAMU, K. N.; NARAYANA, P. A. A. Solution of transient laminar natural convection in a square cavity by an explicit finite element scheme. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Taylor Francis, v. 25, n. 5, p. 593–609, 1994.
- SARRIS, I. E. et al. On the limits of validity of the low magnetic Reynolds number approximation in mhd natural-convection heat transfer. *Numerical Heat Transfer, Part B*, v. 50, p. 157–180, 2006.
- SCHREIBER, R.; KELLER, H. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *Journal of Computational Physics*, v. 49, n. 2, p. 310–333, 1983. ISSN 0021-9991.
- SOURI, M.; AKBARZADEH, P.; DARIAN, H. M. Parallel Thomas approach development for solving tridiagonal systems in GPU programming - steady and unsteady flow simulation. *Mechanics & Industry*, v. 21, n. 3, p. 303, 2020.
- SZEKELY, J.; TODD, M. R. Natural convection in a rectangular cavity transient behavior and two phase systems in laminar flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 14, p. 467–482, 1971.
- TÜRK, Ö. FEM solutions of magnetohydrodynamic and biomagnetic fluid flows in channels. Middle East Technical University, 2014.
- VANKA, S. P. Block-implicit multigrid solution of navier-stokes equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 65, n. 1, p. 138–158, 1986.
- WANG, C.; LIU, J.-g. Analysis of finite difference schemes for unsteady Navier-Stokes equations in vorticity formulation. *Numerische Mathematik*, v. 91, p. 543–576, 05 2002.
- WENDT, J. F. *Computational Fluid Dynamics: An Introduction*. 3. ed. [S.l.]: Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-85055-7.
- WILKES, J. O.; CHURCHILL, S. W. The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure. *AIChE Journal*, v. 12, p. 161–166, 1966.
- WRIGHT, N.; GASKELL, P. An efficient multigrid approach to solving highly recirculating flows. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 63–79, 1995.