

Gildo de Almeida Leonel

# Simulação de Fluidos

Orientador:  
Marcelo Bernardes Vieira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Juiz de Fora  
Julho de 2008

Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação

Prof. Marcelo Bernardes Vieira, D. Sc.  
Orientador

Prof. Rubens de Oliveira, D. Sc.

Prof. Raul Fonseca Neto, D. Sc.

# *Sumário*

## **Lista de Figuras**

## **Resumo**

|          |   |       |
|----------|---|-------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                         | p. 9  |
| 1.1      | Definição do Problema . . . . .           | p. 9  |
| 1.2      | Objetivos . . . . .                       | p. 10 |
| 1.3      | Visão Geral . . . . .                     | p. 10 |
| <b>2</b> | <b>Fundamentos da Dinâmica de Fluidos</b> | p. 12 |
| 2.1      | Elementos Físicos de um Fluido . . . . .  | p. 13 |
| 2.1.1    | Pressão . . . . .                         | p. 13 |
| 2.1.2    | Densidade . . . . .                       | p. 13 |
| 2.1.3    | Viscosidade . . . . .                     | p. 14 |
| 2.2      | Incompressibilidade . . . . .             | p. 15 |
| 2.3      | A Hipótese de Continuidade . . . . .      | p. 16 |
| 2.4      | Forças Atuando em um Fluido . . . . .     | p. 16 |
| 2.5      | Cinemática . . . . .                      | p. 16 |
| 2.6      | As Equações de Navier-Stokes . . . . .    | p. 17 |
| 2.6.1    | Equação do Momento . . . . .              | p. 18 |
| 2.6.2    | Condição de Incompressibilidade . . . . . | p. 19 |
| 2.6.3    | Equações de Euler . . . . .               | p. 20 |
| 2.7      | Euler e Lagrange . . . . .                | p. 20 |

|          |  |              |
|----------|--|--------------|
| 2.7.1    | A Visão de Lagrange . . . . .                                      | p. 20        |
| 2.7.2    | A Visão de Euler . . . . .   | p. 21        |
| 2.7.3    | Um Comparativo . . . . .   | p. 22        |
| 2.8      | Condições de Contorno . . . . .                                    | p. 22        |
| 2.8.1    | Paredes Sólidas . . . . .  | p. 23        |
| 2.8.2    | Superfícies Livres . . . . .                                       | p. 23        |
| <b>3</b> | <b>Simulação Computacional da Dinâmica de Fluidos</b>              | <b>p. 25</b> |
| 3.1      | Discretização . . . . .  | p. 25        |
| 3.1.1    | Grades Cartesianas Uniformes . . . . .                             | p. 25        |
| 3.2      | Grade MAC . . . . .  | p. 26        |
| 3.3      | Visão Geral da Simulação Numérica . . . . .                        | p. 29        |
| 3.3.1    | Forças Aplicadas no Fluido . . . . .                               | p. 30        |
| 3.3.2    | Advecção . . . . .   | p. 30        |
| 3.3.2.1  | Método Semi-Lagrangiano . . . . .                                  | p. 31        |
| 3.3.3    | Atualização da Pressão e Controle de Incompressibilidade . . . . . | p. 32        |
| 3.3.4    | Difusão . . . . .  | p. 34        |
| 3.3.5    | O Solucionador . . . . .   | p. 36        |
| 3.3.6    | Representação Computacional . . . . .                              | p. 37        |
| <b>4</b> | <b>Experimentos e Resultados</b>                                   | <b>p. 38</b> |
| 4.1      | Rotinas . . . . .  | p. 38        |
| 4.1.1    | Advecção . . . . .   | p. 38        |
| 4.1.2    | Forças Aplicadas no Fluido . . . . .                               | p. 38        |
| 4.1.3    | Difusão . . . . .  | p. 38        |
| 4.1.4    | Projeção . . . . .   | p. 39        |
| 4.2      | Visualizador . . . . .   | p. 39        |

|          |   |       |
|----------|---|-------|
| 4.3      | Experimentos . . . . .  | p. 40 |
| 4.3.1    | Experimento com Paredes Sólidas . . . . .                     | p. 40 |
| 4.3.2    | Experimento com Superfícies Livres . . . . .                  | p. 41 |
| 4.3.3    | Experimento com Variação da Taxa de Difusão e Viscosidade . . | p. 41 |
| 4.3.4    | Simulação com Várias Fontes . . . . .                         | p. 43 |
| 4.3.5    | Simulação de um Ciclone . . . . .                             | p. 43 |
| <b>5</b> | <b>Conclusão</b>  | p. 47 |
|          | <b>Apêndice A – Definições Matemáticas</b>                    | p. 49 |
| A.1      | Gradiente . . . . .   | p. 49 |
| A.2      | Divergente . . . . .  | p. 50 |
| A.3      | Laplaciano . . . . .  | p. 50 |
| A.4      | Derivada Material . . . . .                                   | p. 51 |
|          | <b>Referências</b>  | p. 53 |

# *Lista de Figuras*

|    |   |       |
|----|---|-------|
| 1  | Representação da pressão sobre uma unidade de fluido. . . . .                               | p. 13 |
| 2  | Variação do volume $\Omega$ em um fluxo compressível e incompressível. . . .                | p. 15 |
| 3  | Representação da visão de Lagrange em $\mathbb{R}^2$ . . . . .                              | p. 21 |
| 4  | Representação da visão de Euler em $\mathbb{R}^2$ . . . . .                                 | p. 21 |
| 5  | Grade MAC bidimensional. . . . .  | p. 27 |
| 6  | Grade MAC tridimensional. . . . .   | p. 27 |
| 7  | Gráfico de uma função periódica. . . . .  | p. 28 |
| 8  | Advecção inversa: retrocedendo de um ponto $\vec{o}_t$ a um ponto $\vec{o}_{t_0}$ . . . . . | p. 32 |
| 9  | Representação da difusão em duas dimensões . . . . .  | p. 36 |
| 10 | Detalhe da visualização dos vetores de velocidade . . . . .                                 | p. 40 |
| 11 | Visualização da densidade do fluido no primeiro experimento . . . . .                       | p. 41 |
| 12 | Visualização da velocidade do fluido no primeiro experimento . . . . .                      | p. 42 |
| 13 | Simulação utilizando a condição de contorno referente à paredes sólidas                     | p. 42 |
| 14 | Simulação utilizando a condição de contorno referente à superfícies livres                  | p. 42 |
| 15 | A simulação superior tem uma taxa de difusão 10 vezes maior do que a inferior. . . . .      | p. 43 |
| 16 | Um fluido menos viscoso no topo e um mais viscoso na base. . . . .                          | p. 44 |
| 17 | Simulação com 3 fontes distintas. . . . .   | p. 44 |
| 18 | Campo de velocidades. . . . .   | p. 45 |
| 19 | Simulação simplificada de um ciclone. . . . .   | p. 45 |
| 20 | Vetores velocidade. . . . .   | p. 46 |
| 21 | Vista superior da simulação. . . . .  | p. 46 |

Aos meus pais,  
sem eles eu não seria ninguém.

# *Resumo*

Este trabalho trata sobre o problema da simulação computacional de fluidos. Apresenta abordagens e métodos para realizar a simulação baseados na busca de solução para as equações de Navier-Stokes. São apresentados os fundamentos necessários para a compreensão do problema com foco na simulação de fluidos difusivos utilizando uma abordagem Euleriana. Para finalizar, este trabalho demonstra os passos necessários para implementação e visualização desta simulação.

# 1 *Introdução*

Fluido é uma matéria que se deforma continuamente à medida que forças são aplicadas sobre seus corpos. Como exemplos de fluidos têm os líquidos, os gases, os plasmas e também os sólidos plásticos.

Os fenômenos fluidos englobam uma grande gama de eventos como: vento, fogo, fumaça, ondas do mar e ondas induzidas por outros objetos. Esses fenômenos são de visível importância, portanto assim também são suas simulações computacionais. Porém, por mais simples e ordinário que esses fenômenos possam parecer eles são complexos e difíceis de simular.

Na realização da simulação são importantes todas as propriedades físicas que governam o comportamento desta matéria, como a gravidade, pressão interna e as forças viscosas. A preocupação com as limitações computacionais relacionadas à poder computacional também são importantes para que o tempo de resposta da simulação seja aceitável.

A simulação de fluidos é uma área de estudos bem estabelecida. Mas, ainda com muitos problemas em aberto no seu campo de pesquisa.

## 1.1 **Definição do Problema**

Esta monografia abordará o problema relacionado à modelagem matemática dos fluidos e sua simulação em computadores. Serão analisadas suas limitações, seu desempenho e possíveis melhorias.

Fluidos têm um comportamento muito complexo devido à interação de vários fenômenos físicos, sendo assim necessário muito rigor em sua simulação. Desta forma, surgem vários subproblemas que também serão abordados nesta monografia.

Um destes problemas está relacionado à melhor forma de representar o espaço real que é contínuo em um espaço discreto, ou seja, qual a melhor forma de se discretizar

o espaço ao qual os fluidos estão contidos. Também deve se preocupar na iteração dos fluidos com o seu entorno, pois para simular o fluido temos que analisar o suporte em que ele está envolto e seu escoamento através deste.

## 1.2 Objetivos

O objetivo primário deste trabalho é a apresentação e o estudo de métodos de simulação de fluidos, seus modelos matemáticos e computacionais. Como objetivos secundários oriundos do objetivo primário temos:

- explicitar matematicamente os conceitos relacionados à dinâmica de fluidos;
- elaborar um modelo computacional para simulação de fluidos;
- propor e implementar possíveis melhorias;

## 1.3 Visão Geral

Para explanar o assunto, este trabalho está organizado nos capítulos listados à seguir:

O Capítulo intitulado de “Fundamentos da Dinâmica de Fluidos”, apresenta os principais conceitos para o entendimento da dinâmica de fluidos, como as questões de incompressibilidade e a cinemática dos fluidos. Durante todo o capítulo é definido o modelo matemático da dinâmica de fluidos. Por isto, uma seção muito importante refere-se as Equações de Navier-Stokes, que são as equações que governam a dinâmica dos fluidos.

O foco principal do Capítulo “Simulação Computacional da Dinâmica de Fluidos” é a busca por uma solução numérica para as equações de Navier-Stokes. Por isto são explanadas questões como a discretização do espaço, e demonstrados métodos numéricos para a solução de problemas como a advecção e a difusão. E no decorrer do capítulo é explanado como aplicar computacionalmente os métodos explicitados.

Para aplicar todos os conceitos vistos no desenvolver deste trabalho foi realizado uma implementação destes métodos, e os experimentos realizados e os resultados obtidos são encontrados no Capítulo “Experimentos e Resultados”. Neste capítulo foram mostradas diversas configurações para a simulação de fluidos difusivos, como o ar e a fumaça. E foram obtidos resultados satisfatórios dentro do objetivo proposto.

O Capítulo “Conclusão ”, comenta o trabalho desenvolvido e discorre sobre as dificuldades encontradas e as melhorias que podem ser realizadas.

Também é apresentado um Apêndice que contém algumas definições matemáticas relevantes para a compreensão do trabalho, como a derivada material e o divergente.

## *2 Fundamentos da Dinâmica de Fluidos*

A matéria pode ser classificada em três estados: sólido, líquido e gasoso. A dinâmica de fluidos trata da matéria nos estados líquido e gasoso. “Um pedaço de material sólido tem uma forma definida, e esta forma só se modifica quando existe uma mudança nas condições externas. Uma porção de fluido, por outro lado, não tem uma forma predefinida, e diferentes elementos de um fluido homogêneo podem ser rearranjados livremente sem afetar as propriedades macroscópicas desta porção de fluido ” (BATCHELOR, 2002).

A intensidade das forças que mantêm as moléculas unidas é uma das propriedades físicas que diferem os fluidos dos sólidos. Os fluidos não têm uma topologia e nem uma geometria definida, já que estas se modificam a medida que forças são aplicadas sobre o fluido.

Os fluidos são incapazes de manter sua forma porque a energia potencial das forças intermoleculares é pequena em relação à energia cinética associada à vibração de cada molécula. Esta força intermolecular também é uma das características que diferem os líquidos dos gases.

Outra propriedade que separa os líquidos dos gases é a **densidade**. A densidade de uma matéria no estado líquido é muito maior do que no estado gasoso. Mas a diferença mais importante entre as propriedades dos fluidos está relacionada à sua elasticidade, também chamada de **compressibilidade**.

A grande maioria das propriedades dos fluidos estão ligadas à sua estrutura molecular e as forças que atuam sobre ele. Então, a seguir serão abordados alguns tópicos necessários para um melhor entendimento da dinâmica dos fluidos.

## 2.1 Elementos Físicos de um Fluido

### 2.1.1 Pressão

A pressão  $p$  é definida como a razão entre o módulo da força normal à superfície  $f$  e a unidade de área do fluido  $a$ .

$$p = \frac{f}{a} \quad (2.1)$$

Em uma distribuição uniforme, todos os pontos do fluido situados à mesma profundidade possuem a mesma pressão.

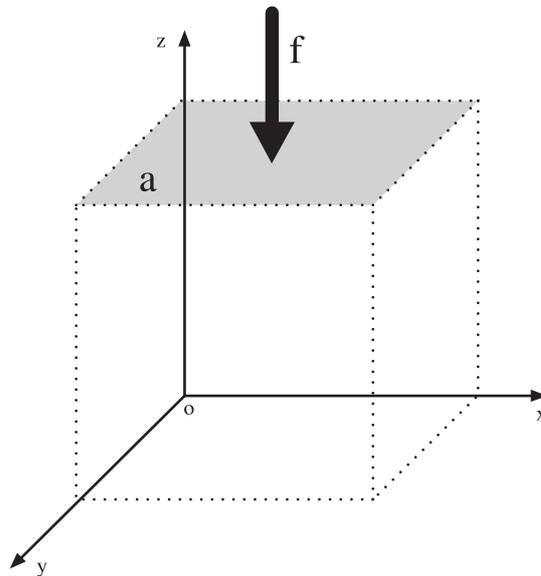


Figura 1: Representação da pressão sobre uma unidade de fluido.

A pressão exercida sobre a superfície de um fluido se transmite para todos os pontos do líquido com a mesma intensidade. Dividindo o fluido em partes, cada parte individualmente exercerá uma força perpendicular à área das outras partes adjacentes, ou seja, mesmo não existindo uma pressão externa, o peso de cada parte do fluido, exercerá pressão sobre as outras partes. Também se verifica que regiões com alta pressão empurrarão regiões de baixa pressão.

### 2.1.2 Densidade

A densidade média  $\rho$  é definida como a razão entre a massa  $m$  do fluido e seu volume  $\Omega$ .

$$\rho = \frac{m}{\Omega} \quad (2.2)$$

A densidade também está ligada à pressão, pois, um fluido mais denso exercerá maior pressão sobre um fluido menos denso. A densidade da água é aproximadamente  $1000 \text{ kg/m}^3$  e a do ar aproximadamente  $1.3 \text{ kg/m}^3$ , observa-se que a densidade da água é aproximadamente 700 vezes maior do que a do ar. Assim a pressão exercida pela água é muito maior do que a exercida pelo ar. Analisando todo o espaço que contem o fluido, e tomando uma região com densidade maior do que seu entorno, pode-se observar uma maior concentração de fluido nesta região.

### 2.1.3 Viscosidade

A viscosidade está relacionada ao atrito interno que ocorre no escoamento de um fluido, as camadas adjacentes do fluido exercem forças retardantes uma sobre as outras. Este fenômeno surge devido à coesão entre as moléculas do fluido.

Em um fluxo contínuo, define-se **fluxo laminar** quando as camadas adjacentes escoam com suavidade umas sobre as outras. E **fluxo turbulento** quando a velocidade do fluxo aumenta e o fluxo se torna desordenado, com movimentos irregulares e pseudo-aleatórios.

A diferença desta propriedade é observada em materiais como o mel e o álcool, onde o mel é mais viscoso do que o álcool. Acarretando um escoamento mais retardado do mel em relação ao álcool. A viscosidade cinemática  $\nu$  mede o quão viscoso um fluido é. Sendo definida como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.3)$$

onde,  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade dinâmica inerente a cada material.

Intuitivamente pode-se entender a viscosidade como sendo a força que tenta fazer com que uma partícula se mova com uma velocidade semelhante à partículas que estão próximas à ela. Então ela tenta minimizar a diferença de velocidade entre as partes do fluido que estão próximas. Por isto podemos utilizar o laplaciano, explanado no Apêndice A.3, para indicar a viscosidade em um determinado fluxo:

$$\mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} \quad (2.4)$$

onde  $\vec{u}$  representa o vetor velocidade daquele fluxo.

## 2.2 Incompressibilidade

Nesta seção será explanada uma propriedade do **fluxo** chamada de **compressibilidade**. Observa-se que o volume dos fluidos é modificado à medida que forças atuam sobre seus corpos. Uma prova disto são as ondas sonoras, que resultam da perturbação no volume do fluido.

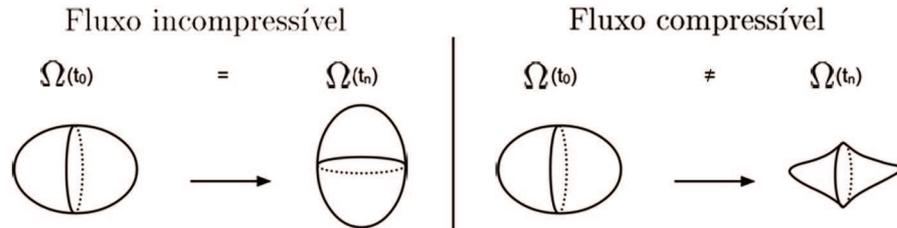


Figura 2: Variação do volume  $\Omega$  em um fluxo compressível e incompressível.

É mais fácil de verificar esta propriedade nos gases, mas os líquidos também têm seu volume modificado. Normalmente estas alterações no volume não são muito grandes. O estudo do comportamento dos fluidos sobre estas circunstâncias, chamada de **fluxo compressível**, é complicada e muito cara para se simular, sendo mais importante no campo da acústica. No nosso estudo somente serão abordados **fluxos incompressíveis**. Em um fluxo incompressível a densidade de cada partícula  $a_i$  de material permanece a mesma durante o movimento.

$$\rho_{a_i}(t, \vec{x}) = \rho_{a_i}(t_0, \vec{x}_0) \quad (2.5)$$

onde, a densidade da partícula  $a_i$  em qualquer tempo  $t$  e posição  $\vec{x}$  permanece a mesma encontrada nas condições iniciais  $t_0$  e  $\vec{x}_0$ .

Conseqüentemente, a derivada material explicada no Apêndice A.4 será igual a zero.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.6)$$

Algumas vezes incompressibilidade é erroneamente tida como propriedade do fluido e não do fluxo, mas ela depende somente da velocidade do fluxo. Ressaltando que ao dividir o fluido em partes esta propriedade não implicará que  $\rho$  seja constante em cada parte, pois as massas e volumes serão diferentes.

## 2.3 A Hipótese de Continuidade

São a partir das leis de conservação da massa, do momento e da energia que as equações diferenciais que governam a dinâmica de fluidos são derivadas. “É de costume formular as leis de conservação sob a suposição que o fluido é um meio ‘continuum’ (hipótese de continuidade). Assim as propriedades do fluxo, como densidade e velocidade podem ser descritas como sendo grandezas escalares dependente do tempo ou campos vetoriais em  $\mathbb{R}^3$ ” (WESSELING, 2000).

Nos líquidos esta hipótese é sempre satisfeita, pois suas moléculas permanecem muito próximas umas das outras. Diferente dos gases, onde existem consideráveis regiões de vácuo separando suas moléculas, e esta hipótese somente é satisfeita em algumas situações (WESSELING, 2000, p.2).

Neste estudo, somente serão abordados fluidos que satisfazem a **hipótese de continuidade**.

## 2.4 Forças Atuando em um Fluido

Considerando-se um fluido em um determinado momento  $t$ , existem dois tipos de forças sendo exercidas:

- Forças de contato (superfície). Estas forças são exercidas sobre uma superfície  $\partial\Omega$  do fluido. Como exemplos destas forças temos a pressão exercida pelo contorno que envolve o fluido e a força de fricção exercida por outras partículas do fluido.
- Forças externas (à distância), exercidas em uma porção do volume do fluido, devido à alguma causa externa como gravidade e o electromagnetismo.

## 2.5 Cinemática

Cinemática deriva do Grego  $\kappa\iota\nu\eta\sigma\iota\varsigma$  e significa **movimento**. Observando o fluido como um conjunto de moléculas pode-se descrever o movimento de uma molécula utilizando a mecânica clássica. Assumindo os três eixos mutuamente ortogonais que formam o sistema cartesiano de coordenadas. Um ponto no fluido pode ser identificado por estas coordenadas cartesianas  $\vec{x} = (x, y, z)$ .

Cada ponto no fluido está associado a um vetor posição que começa na origem do eixo cartesiano e termina no ponto específico. A coordenada cartesiana do ponto é igual aos componentes do vetor posição. Este é definido como positivo ou negativo de acordo com a projeção do vetor posição no eixo correspondente. A coordenada cartesiana de um ponto representa geometricamente a entidade associada ao vetor posição.

Podemos descrever o ponto  $\vec{x}$  em função dos versores  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  como sendo:

$$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \text{ e seu vetor velocidade da forma: } \vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}.$$

Verifica-se então que a mecânica clássica pode ser aplicada para solução envolvendo a cinemática das moléculas.

“O movimento de um corpo sólido não deformável, chamado de corpo rígido, pode ser descrita: em termos de dois vetores: o vetor velocidade e o vetor translação, a velocidade angular do vetor de rotação e em qual centro específico a rotação ocorre. Um corpo rígido é orientado pelo vetor velocidade, e rotacionado devido à velocidade angular que é fixada no centro de rotação designado, o movimento de um fluido não pode ser geralmente descrito em termos de dois vetores somente. Uma estrutura mais avançada é necessária para representar a extensa família de movimentos ” (POZRIKIDIS, 2001).

Em 1822, Claude Navier, e em 1845, George Stokes formularam um conjunto de equações que descreveriam o movimento das substâncias fluidas. Estas equações estabelecem que mudanças no momento e aceleração de uma partícula fluída são simplesmente o resultado das mudanças na pressão e forças viscosas dissipativas atuando dentro do fluido. Assim essas equações receberam o nome de equações de **Navier-Stokes** e são um dos mais úteis conjunto de equações, porque descrevem a física de um grande número de fenômenos de interesse econômico e acadêmico. Elas são usadas para modelar o clima, corrente oceânicas, fluxos da água em canos, movimentos das estrelas dentro da galáxia, propagação de fumaça em incêndios, projetos de aeronaves e carros, estudo do fluxo sanguíneo, projeto de usinas de força, análise dos efeitos da poluição, entre outros.

## 2.6 As Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes são um conjunto de equações diferenciais parciais normalmente descritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g} + \nu \nabla \cdot \nabla \vec{u} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.8)$$

### 2.6.1 Equação do Momento

A primeira equação diferencial (Eq. 2.7) é uma equação vetorial, denominada **Equação do Momento**. Pode ser obtida através da lei de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ . E mostra como será a aceleração do fluido à medida que forças externas atuam sobre ele.

Tomando o fluido como um sistema de partículas, viu-se que podemos utilizar a mecânica clássica. Esta partícula terá uma massa  $m$ , um volume  $\Omega$  e uma velocidade  $\vec{u}$ . Temos que a aceleração da partícula é dada por:

$$\vec{a} \equiv \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (2.9)$$

Substituindo na lei de Newton temos:

$$m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F} \quad (2.10)$$

Analisando as forças que atuam sobre a partícula, temos a gravidade, a pressão e as forças viscosas. Substituindo na Equação 2.10:

$$m \frac{D\vec{u}}{Dt} = m\vec{g} - \Omega \nabla p + \Omega \mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} \quad (2.11)$$

onde, o primeiro termo do lado direito da equação representa a força da gravidade atuando sobre o fluido, definida como  $m\vec{g}$ . O segundo termo,  $-\Omega \nabla p$ , denota a força da pressão por unidade de volume. O sinal negativo nesta parcela ocorre pois, por definição, uma pressão positiva atua interiormente, e a pressão analisada está atuando na superfície do fluido. O terceiro termo,  $\Omega \mu \nabla \cdot \nabla \vec{u}$ , denota as forças viscosas por unidade de volume.

Obviamente obtêm erros ao assumir o fluido como um conjunto de partículas, então toma-se o limite quando o numero de partículas tender ao infinito e o tamanho das partículas tenderem à zero. Porém esta abordagem colocará erros no nosso problema, por que a massa  $m$  e o volume  $\Omega$  estão indo para zero. Resolvemos então dividindo a Equação 2.11 pelo volume  $\Omega$ .

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} \quad (2.12)$$

Dividindo ambos os termos pela densidade  $\rho$ :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} + \frac{\mu}{\rho}\nabla \cdot \nabla \vec{u} \quad (2.13)$$

Substituindo a viscosidade cinemática  $\nu$ , definimos a equação do momento:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} + \nu\nabla \cdot \nabla \vec{u} \quad (2.14)$$

### 2.6.2 Condição de Incompressibilidade

A segunda equação diferencial (Eq. 2.8) é imposta para restringir o domínio dos fluidos à serem regidos por este conjunto de equações. Ou seja, esta equação impõe que a incompressibilidade vista na Seção 2.2 tem que ser respeitada para se obter uma modelagem correta para o problema.

Como visto, em fluidos incompressíveis não ocorre alteração no volume. Tomando um bloco arbitrário de fluido  $b$  em um instante de tempo  $t$ . Ao realizar a integração da componente normal da velocidade em volta da superfície do fluido pode-se medir o quão rápido o volume deste pedaço de fluido se modifica.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \iint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \hat{n} \quad (2.15)$$

onde,  $\Omega$  representa a volume do pedaço de fluido,  $\partial\Omega$  sua superfície de contorno e  $\hat{n}$  o componente normal da velocidade.

Para fluidos incompressíveis não ocorrerá a mudança de volume, portanto:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \hat{n} = 0 \quad (2.16)$$

Agora podemos utilizar o Teorema do Divergente para obtermos uma integral sobre o volume. Assim obtemos:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.17)$$

aplicando a definição de divergente:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.18)$$

Esta equação deve ser verdade para qualquer região escolhida e por conseqüência para qualquer  $\Omega$  escolhido. Então a única função que ao integrar obtém-se o valor zero independentemente do volume de integração é o próprio zero. Desta forma o integrando deve ser igual a zero:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Assim obtemos a segunda parte das equações de Navier-Stokes.

### 2.6.3 Equações de Euler

A viscosidade é extremamente importante ao se simular mel, lava e outras substâncias viscosas. Mas em algumas simulações sua contribuição pode ser omitida por se considerada insignificante. Simplificando assim, o conjunto de equações que deverão ser simuladas numericamente.

Muitos métodos de simulação numérica introduzem erros, e estes erros podem ser fisicamente reinterpretados como viscosidade. Desta forma, mesmo omitindo a viscosidade nas equações, os erros numéricos se encarregarão de representa-la na simulação.

As equações de Navier-Stokes sem o termo referente à viscosidade são denominadas **Equações de Euler**, e um fluido sem viscosidade é chamado de **invíscido**. As equações incompressíveis de Euler são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \vec{g} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.7 Euler e Lagrange

Ao analisar o movimento de um fluido contínuo, pode-se realizar uma abordagem Euleriana ou Lagrangiana.

### 2.7.1 A Visão de Lagrange

Na abordagem Lagrangiana o fluido é tratado como um sistemas de partículas. Onde cada ponto no fluido é classificado como uma partícula separada. Esta partícula tem

uma posição  $\vec{x}$ , uma velocidade  $\vec{u}$ , e outras características como uma densidade específica. Pode-se fazer um paralelo com as moléculas do fluido, onde cada partícula representa uma molécula do fluido. Um conjunto discreto de partículas geralmente estão conectados em uma malha, e como visto na Seção 2.5 a mecânica clássica pode ser aplicada na abordagem Lagrangiana.

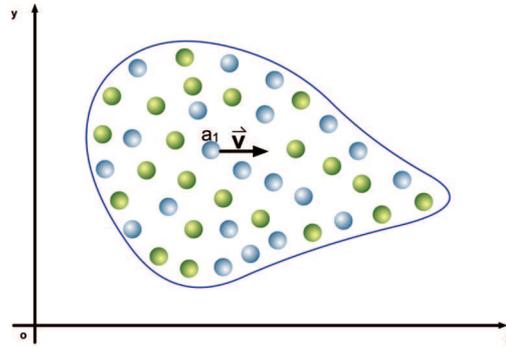


Figura 3: Representação da visão de Lagrange em  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.7.2 A Visão de Euler

Na visão de Euler, ao invés de abordar cada partícula, observa-se pontos fixos no espaço e analisa como as grandezas do fluido (como densidade, velocidade, temperatura, entre outras) se comportam naquele ponto, com o decorrer do tempo. Possivelmente o fluido está passando por estes pontos e provocando algum tipo de mudança. Por exemplo, se um fluido com uma alta temperatura seguido por um fluido com baixa temperatura passam por um ponto fixo no espaço, a temperatura naquele ponto vai aumentar e diminuir, sem que necessariamente a temperatura de alguma partícula se modifique. Além disso, as grandezas de uma partícula do fluido podem se modificar e esta modificação provocar alterações nas grandezas em mais de um ponto no espaço.

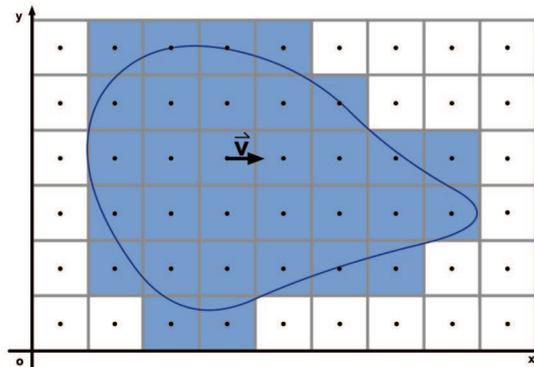


Figura 4: Representação da visão de Euler em  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.7.3 Um Comparativo

A abordagem Lagrangiana em alguns aspectos é mais intuitiva do que a Euleriana. Mas esta é melhor para se trabalhar analiticamente, utilizando as derivadas parciais, como os gradientes de pressão e viscosidade. Além de ser mais fácil realizar aproximações numéricas utilizando as derivadas parciais em um ponto fixo, do que em um conjunto arbitrário de partículas em movimento.

Numericamente, a visão de Lagrange corresponde a um sistema de partículas, podendo ou não existir uma malha conectando estas partículas. Já a visão de Euler, corresponde à utilização de grades fixas no espaço, e esta estrutura não se modifica a medida que o fluido passa sobre ela, o que modifica são as características analisadas naquele ponto.

Pode-se analisar um exemplo para evidenciar as diferenças das abordagens: Ao coletar informações sobre o clima de uma região utilizando a abordagem Lagrangiana, utilizaria-se um balão flutuando de acordo com o vento, e mediria todas as grandezas, como pressão e temperatura, encontradas no ar presente no balão ao longo de sua trajetória. Na abordagem Euleriana, estas grandezas seriam medidas em um ponto fixo no espaço, como uma torre por exemplo, e seria analisado as alterações nas grandezas do ar que passa por este ponto.

## 2.8 Condições de Contorno

Até o presente momento somente foram levantadas questões relacionadas ao fluido. Nesta seção serão abordadas questões relacionadas ao ambiente ao qual o fluido pertence e seu impacto na simulação. Este ambiente varia de simulação para simulação, podendo ser um terreno com suas imperfeições, um copo, um aquário cubico, ou seja, qualquer suporte com o qual o fluido pode interagir. E quanto mais complexo este contorno, mais complexa será sua simulação.

Neste trabalho serão abordadas duas condições de contorno: **paredes sólidas** sem imperfeições e **superfícies livres**, como o ar, que não influenciarão o fluido. Outros contornos mais complexos, como a interação entre dois fluidos distintos, não serão abordados, sendo encontrados em outras literaturas (HONG; KIM, 2005).

### 2.8.1 Paredes Sólidas

A parede sólida com a qual o fluido está em contato pode ser expressa em termo da velocidade:

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = 0 \quad (2.20)$$

onde, a componente normal  $\hat{n}$  da velocidade  $\vec{u}$  do fluido será igual a zero. Significando que o fluxo de um fluido não irá transpor uma parede sólida. Neste caso  $\hat{n} = 0$ , pois o sólido não está em movimento. Caso o sólido esteja em movimento a componente normal da velocidade  $\vec{u}$  do fluido será igual à componente normal da velocidade  $\vec{u}_{sólido}$  do sólido:

$$\vec{u} \cdot \hat{n} = \vec{u}_{sólido} \cdot \hat{n} \quad (2.21)$$

Percebe-se que o fluido ainda pode mover-se na direção tangente à superfície do sólido, pois somente a componente normal  $\hat{n}$  da velocidade foi restrita.

### 2.8.2 Superfícies Livres

As superfícies livres representam onde o fluido não é modelado. Por exemplo simulando a uma gota de água da chuva caindo. Provavelmente durante a queda, a superfície do fluido não estará em contato com uma superfície sólida, estará em contato somente com o ar. Porém como visto na Seção 2.1.2, a densidade da água é aproximadamente 700 vezes maior do que a do ar, por isto o ar não é capaz de provocar alterações significativas na água. Pode-se então simplificar o modelo e assumir o ar sendo representado como uma superfície livre, levando em conta somente a pressão atmosférica do ar. Como em um fluxo incompressível somente a diferença de pressão importa, podemos assumir um valor constante arbitrário para a pressão  $p$  nas superfícies livres, sendo zero o mais conveniente. Desta forma uma superfície livre é onde  $p = 0$ , e não é necessário controlar a velocidade em qualquer direção.

Outro caso que se enquadra na especificação da superfície livre, é quando um domínio restrito de uma simulação, como por exemplo simulando fumaça no ar livre. O domínio completo seria toda a superfície da terra, então restringe-se o domínio para uma região menor, onde analisa-se o comportamento deste fluido. Desta forma, especifica-se uma grade que cobre toda a região de interesse. E no exterior desta região o fluido continua

existindo, mas não será simulado. Isto permite o livre transito do fluido sobre esta região, então consideramos esta como uma superfície livre, porém não existe uma superfície limitadora visível.

## ***3 Simulação Computacional da Dinâmica de Fluidos***

Neste capítulo será abordada uma descrição euleriana da dinâmica de fluidos. Serão descritas formas numéricas de se solucionar as equações de Navier-Stokes.

### **3.1 Discretização**

Para se trabalhar computacionalmente com problemas reais, como a movimentação de um fluido, tem-se que representar computacionalmente todos os componentes envolvidos. Desta necessidade surge uma questão relacionada a como representar objetos reais no computador.

Diferente do mundo real, onde o espaço em que os objetos estão inseridos é contínuo, no computador este espaço é discreto. Em um espaço discreto pode-se aplicar métodos numéricos para se obter a solução do problema desejado.

Para obtenção de simulação numérica eficiente, os valores dos campos que representam as grandezas envolvidas como velocidade e pressão devem ser de fácil acesso. Desta forma a discretização das equações e dos campos vetoriais devem ser levadas em conta.

Uma das abordagens eulerianas mais adotadas refere-se ao uso de grades para representar os elementos da simulação. Mas mesmo assim ainda existem vários tipos de grades.

#### **3.1.1 Grades Cartesianas Uniformes**

As grades cartesianas uniformes são bastante utilizadas na computação. Uma grade ser cartesiana significa que cada célula da grade é alinhada com os eixos cartesianos. Desta

forma temos o domínio  $\mathbf{U}$  em  $\mathbb{R}^3$  como sendo o paralelepípedo:

$$\mathbf{U} = [a, b] \times [c, d] \times [f, g] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d \text{ e } f \leq z \leq g\} \quad (3.1)$$

e discretiza-se este paralelepípedo utilizando os pontos de um reticulado tridimensional (lattice) com  $\Delta = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

$$\mathbf{U}' = \{(x_i, y_j, z_k) \in \mathbf{U} | x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z; \ i, j, k \in \mathbb{Z}; \ \Delta x, \Delta y, \Delta z \in \mathbb{R}\} \quad (3.2)$$

Cada célula, denominada por voxel, é representada em  $\mathbb{R}^3$  por suas coordenadas  $(i, j, k)$ . Em  $\mathbb{R}^2$  o domínio pode ser discretizado analogamente.

- **Grade Centralizada:** Este é um tipo especial de grade cartesiana uniforme. Na Grade Centralizada todos os campos são representados no centro de cada célula. Desta forma, a velocidade, e todas as outras propriedades estarão localizadas no centro do voxel.
- **Grade Balanceada:** Neste tipo de grade, diferentes variáveis são representadas em lugares diferentes. Neste trabalho será adotado um tipo de grade balanceada chamada de Grade MAC, e suas vantagens que serão explanadas a seguir.

## 3.2 Grade MAC

A grade MAC (**Marker and Cell**) surgiu em 1965, desenvolvida por Harlow e Welch especificamente para fluxos em superfícies livres. Baseada nas grades balanceadas, a grade MAC facilita a aplicação do método de diferenças finitas para investigação da dinâmica de fluidos incompressíveis.

Na grade MAC, diferentes variáveis são armazenadas em diferentes localidades. Em duas dimensões (Fig. 5), a pressão é amostrada no centro da célula, indicada por  $p_{i,j}$ .

As velocidades são separadas em suas componentes cartesianas  $(u, v)$ , sendo  $u$  correspondente ao eixo cartesiano  $x$  e  $v$  correspondente ao eixo  $y$ . Desta forma a componente  $u$  é amostrada no centro das faces horizontais da célula e  $v$  no centro das faces verticais. Na Figura 5, tem-se por exemplo,  $u_{i+1/2,j}$  e  $u_{i-1/2,j}$  representando esta amostragem no eixo  $x$  e  $v_{i,j+1/2}$  e  $v_{i,j-1/2}$  no eixo  $y$ . Em três dimensões, a grade MAC é montada da mesma forma, com a pressão no centro da célula e as três componentes de velocidade  $(u, v, w)$  divididas, e amostradas no centro de cada face correspondente (Fig. 6).

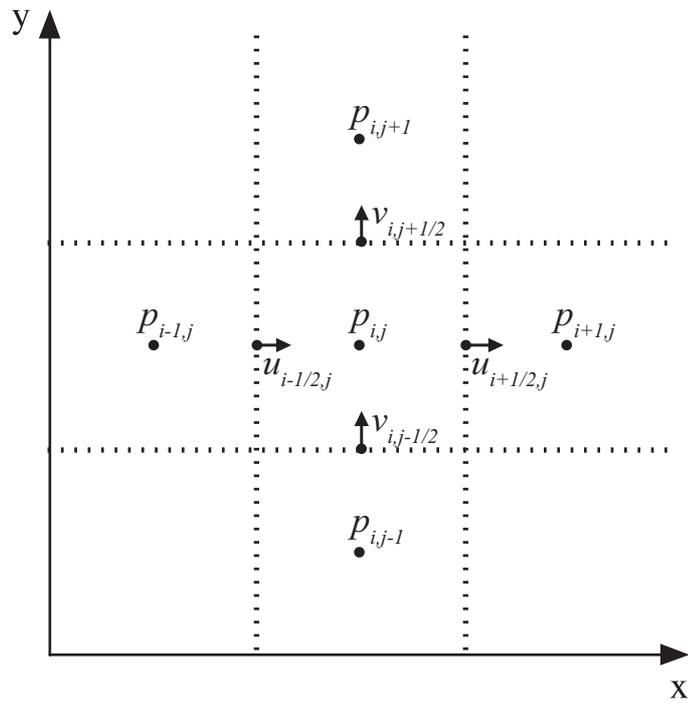


Figura 5: Grade MAC bidimensional.

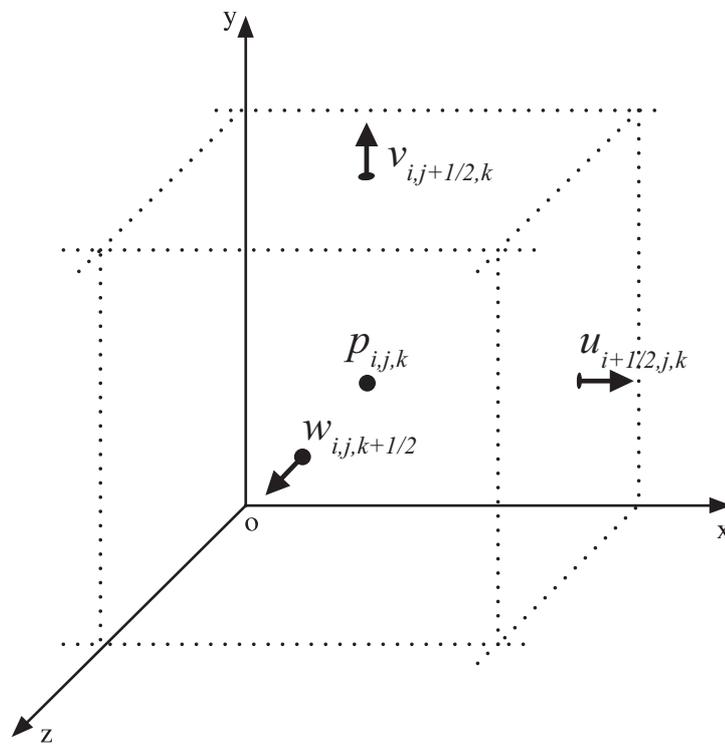


Figura 6: Grade MAC tridimensional.

A grade MAC permite a obtenção de uma derivada central precisa para o gradiente da pressão e para o divergente da velocidade, utilizados nos métodos numéricos que serão explanados neste capítulo. Para melhor entendimento considere por exemplo a obtenção da derivada de uma quantidade  $q$ , amostrada em uma grade diferente da MAC.

Para estimar  $\partial q/\partial x$  no ponto  $i$  da grade, utiliza-se a seguinte forma da derivada central:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_i \approx \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.3)$$

mas o problema desta fórmula é que ela estima a derivada no ponto  $i$  mas ignora completamente o valor de  $q_i$ . Esta peculiaridade pode ser desastrosa em algumas situações.

Por exemplo, pode-se assumir que uma função é constante quando sua primeira derivada é zero, ao observar uma função periódica como na Figura 7, amostrar ela em uma grade não MAC e aplicar a formula da derivada central (Eq. 3.3), conclui-se que esta função é constante, o que obviamente não é verdade (Fig. 7).

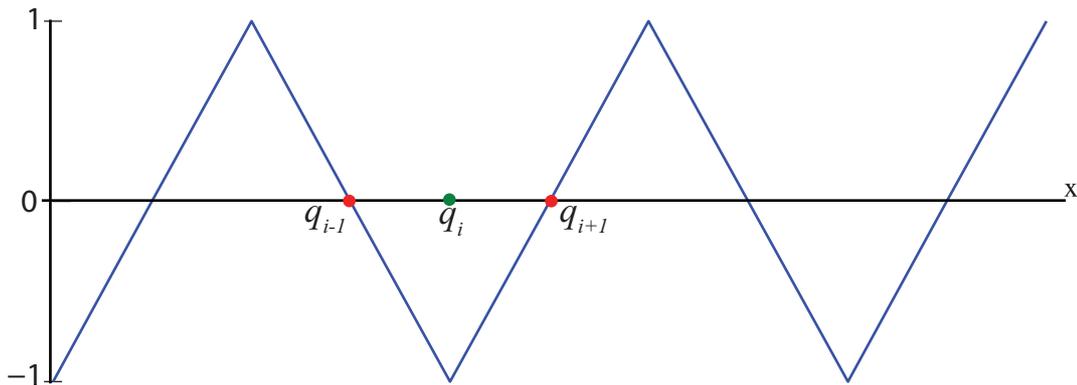


Figura 7: Gráfico de uma função periódica.

Pode-se utilizar a grade MAC para resolver este problema. Pois, amostrando os valores de  $q$  na metade do caminho, consegue-se obter a aproximação da derivada central naturalmente.

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_i \approx \frac{q_{i+1/2} - q_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (3.4)$$

Esta formulação não omite nenhum valor de  $q$  como a Equação 3.3. E quando seu valor for igual a zero, realmente tem-se uma função constante. Ao se realizar a simulação esta abordagem é facilmente aplicada no tratamento da pressão e da incompressibilidade. Mas uma das desvantagens desta abordagem ocorre quando necessita-se por exemplo, calcular o vetor velocidade em algum ponto no espaço, já que algum tipo de interpolação terá que ser realizada, pois as componentes em diferentes eixos não estão diretamente conectadas. Esta questão fica mais explícita analisando estas aproximações em três dimensões como

a seguir.

$$\vec{u}_{i,j,k} = \left( \frac{u_{i-1/2,j,k} + u_{i+1/2,j,k}}{2}, \frac{v_{i,j-1/2,k} + v_{i,j+1/2,k}}{2}, \frac{w_{i,j,k-1/2} + w_{i,j,k+1/2}}{2} \right) \quad (3.5)$$

$$\vec{u}_{i+1/2,j,k} = \left( u_{i+1/2,j,k}, \frac{v_{i,j-1/2,k} + v_{i,j+1/2,k} + v_{i+1,j-1/2,k} + v_{i+1,j+1/2,k}}{4}, \frac{w_{i,j,k-1/2} + w_{i,j,k+1/2} + w_{i+1,j,k-1/2} + w_{i+1,j,k+1/2}}{4} \right) \quad (3.6)$$

$$\vec{u}_{i,j+1/2,k} = \left( \frac{u_{i-1/2,j,k} + u_{i+1/2,j,k} + u_{i-1/2,j+1,k} + u_{i+1/2,j+1,k}}{4}, v_{i,j+1/2,k}, \frac{w_{i,j,k-1/2} + w_{i,j,k+1/2} + w_{i,j+1,k-1/2} + w_{i,j+1,k+1/2}}{4} \right) \quad (3.7)$$

$$\vec{u}_{i,j,k+1/2} = \left( \frac{u_{i-1/2,j,k} + u_{i+1/2,j,k} + u_{i-1/2,j,k+1} + u_{i+1/2,j,k+1}}{4}, \frac{v_{i,j-1/2,k} + v_{i,j+1/2,k} + v_{i,j-1/2,k+1} + v_{i,j+1/2,k+1}}{4}, w_{i,j,k+1/2} \right) \quad (3.8)$$

Podendo ser obtida de forma análoga em duas dimensões.

### 3.3 Visão Geral da Simulação Numérica

Devido à complexidade das equações de Navier-Stokes (Eq. 2.7), o processo para resolvê-las numericamente não é simples. Com o intuito de simplificar este processo, a equação é dividida em componentes menores, e mais fáceis de solucionar. Estas componentes podem ser resolvidas sucessivamente produzindo a solução completa do problema. Pode-se realizar esta operação, pois, quando a taxa de modificação de uma quantidade genérica é a soma de vários termos distintos, a atualização desta quantidade pode ser obtida computando e adicionando um termo de cada vez.

Para as equações de Navier-Stokes (Eq. 2.7), assume-se as seguintes componentes:

- **Forças aplicadas no fluido;**

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{F}$$

- **Advecção;**

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = 0$$

- **Atualização da pressão - Controle de incompressibilidade.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \vec{p} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

- **Difusão;**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla \cdot \nabla \vec{u}$$

### 3.3.1 Forças Aplicadas no Fluido

Este é o mais simples dos processos de simulação de fluidos. Ele representa a aplicação de todas as forças externas que atuam no fluido, como por exemplo, a gravidade.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{F} \quad (3.9)$$

Utilizando o Método de Euler (PATEL, 1994) para solução desta EDP obtemos que a contribuição de cada força externa no componente velocidade  $\vec{u}$  é dado da seguinte forma:

$$\vec{u}_{i,j,k}^{n+1} = \vec{u}_{i,j,k}^n + \Delta t \cdot \vec{F}_{i,j,k} \quad (3.10)$$

onde  $\vec{u}_{i,j,k}^{n+1}$  é o vetor velocidade depois dá contribuição de uma força externa  $F_{i,j,k}$  que foi aplicada naquele ponto.

### 3.3.2 Advecção

A advecção pode ser descrita como o transporte de uma quantidade de um atributo genérico  $q$  através do fluxo do fluido. A parte da equação de Navier-Stokes que representa a advecção é a seguinte:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = 0 \quad (3.11)$$

ou utilizando a definição de derivada material (Seção A.4) :

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 \quad (3.12)$$

Este EDO pode ser definido em uma dimensão como:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

e sua solução pode ser encontrada substituindo as derivadas pelo método das diferenças finitas em uma grade MAC:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.14)$$

onde  $q_i^{n+1}$  representa o valor de um atributo  $t$  decorrido um espaço de tempo  $\Delta t$ , e  $\Delta x$  a distancia entre duas células da grade em relação ao eixo  $x$ .

Assim obtêm-se o novo valor do atributo:

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \Delta t u_i^n \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.15)$$

Mas este método é instável ao se adotar grandes espaços de tempo por isto não será utilizado na implementação. Desta forma, pode-se utilizar outros métodos mais estáveis como será visto a seguir.

### 3.3.2.1 Método Semi-Lagrangiano

Como intuitivamente a advecção é a força do movimento do fluido, agindo sobre ela mesma, os valores da velocidade irão se mover adiante de acordo com o vetor velocidade. Este procedimento refere-se à abordagem Lagrangiana vista na Sub-seção 2.7.1 e foi apresentado por Jos Stam em 1999 (STAM, 1999).

Como à discretização do espaço, utilizando grades, impossibilita a abordagem Lagrangiana pura, Stam elaborou o Método Semi-Lagrangiano. Este método é incondicionalmente estável e tem seu princípio em um sistema de partículas.

A idéia deste método é analisar o movimento de uma partícula imaginária transportando um atributo genérico  $q$  ao longo de uma trajetória. Assim, pode-se utilizar o vetor velocidade para a partir de um ponto  $\vec{o}_t$  retroceder a advecção até ao ponto de origem  $\vec{o}_{t_0}$  e neste ponto verificar qual o valor que foi transportado do ponto  $\vec{o}_{t_0}$  para o ponto  $\vec{o}_t$ .

O ponto de origem é obtido da seguinte forma:

$$\vec{o}_{t_0} = \vec{o}_t - \Delta t \vec{u}_{o_t} \quad (3.16)$$

Ressaltando que ao realizar a advecção a partir deste ponto chega-se ao ponto que está sendo analisado no momento. Isto é, o novo valor do atributo  $q$  em um ponto no espaço  $\vec{o}_t$  é justamente o antigo valor de  $q$  que a partícula tinha ao partir do ponto  $\vec{o}_{t_0}$ .

Desta forma sabe-se de onde o atributo partiu, falta descobrir qual o seu valor naquele ponto. Como normalmente o ponto inicial não é um ponto que foi amostrado na grade, utiliza-se uma interpolação para obter uma boa aproximação de seu valor. Esta interpolação pode ser bilinear em  $\mathbb{R}^2$  e trilinear em  $\mathbb{R}^3$ .

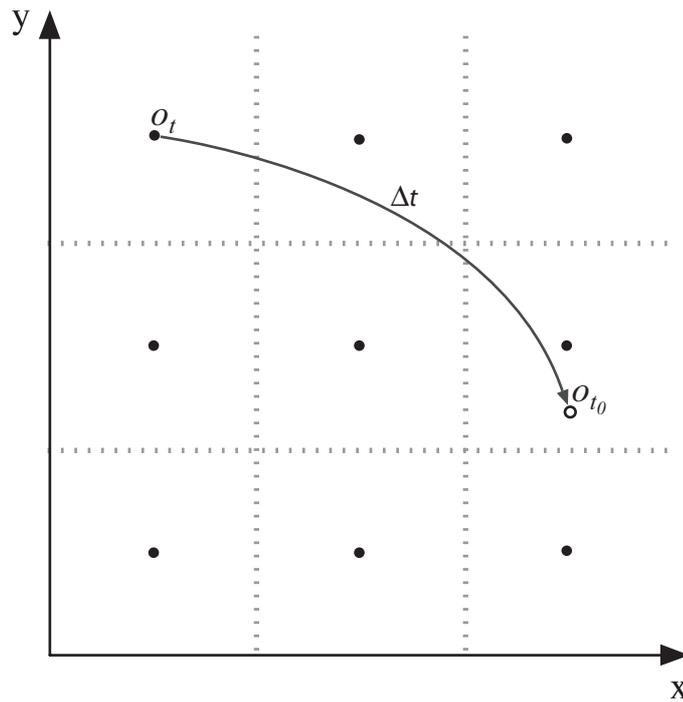


Figura 8: Advecção inversa: retrocedendo de um ponto  $\vec{o}_t$  a um ponto  $\vec{o}_{t_0}$

Explicitando o valor de  $q_{o_t}^{n+1}$ :

$$q_{o_t}^{n+1} = \text{interpolação}(q^n, \vec{o}_t - \Delta t \vec{u}_{o_t}) \quad (3.17)$$

Na prática será necessário realizar a advecção do vetor velocidade, e dos atributos adicionais como densidade e temperatura. Usualmente na grade MAC estes atributos adicionais são armazenados no centro da célula, mas a velocidade é armazenada como discutido na Seção 3.2. Neste caso, para estimar a trajetória da partícula imaginária será necessário usar a velocidade estimada naquele ponto.

Apesar de estável para qualquer  $\Delta t$ , este método acarreta uma perda de volume. Isto significa que não pode ser utilizado para realizar a advecção de campos que necessitam de uma alta precisão. No entanto pode ser utilizado na simulação de substâncias difusivas como a fumaça, pois a perda de volume tende a ser natural.

### 3.3.3 Atualização da Pressão e Controle de Incompressibilidade

Ao realizar os passos anteriores a condição de incompressibilidade não foi ressaltada. No entanto para o fluxo ser natural o vetor velocidade deve respeitar a lei de conservação da massa. Então esta propriedade é garantida adicionando o termo de pressão às equações

de Navier-Stokes. Desta forma tem-se:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \vec{p} = 0 \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.19)$$

Verifica-se que o primeiro termo representa subtrair da velocidade intermediária  $\vec{u}$  o gradiente da pressão:

$$u^{\vec{n}+1} = \vec{u} - \Delta t \frac{1}{\rho} \nabla \vec{p} \quad (3.20)$$

e o resultado deve respeitar o segundo termo:

$$\nabla \cdot u^{\vec{n}+1} = 0 \quad (3.21)$$

Assim obtêm-se:

$$\nabla \cdot u^{\vec{n}+1} = \nabla \cdot \left( \vec{u} - \Delta t \frac{1}{\rho} \nabla \vec{p} \right) \quad (3.22)$$

$$= \nabla \cdot \vec{u} - \Delta t \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla \vec{p} \quad (3.23)$$

$$= 0 \quad (3.24)$$

$$\Leftrightarrow \Delta t \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla \vec{p} = \nabla \cdot \vec{u} \quad (3.25)$$

A Equação 3.25 também é conhecida como Equação de Poisson para o atributo pressão. E pode ser resolvida usando diferentes métodos numéricos. Como o Algoritmo do Gradiente Conjugado Precondicionado (BRIDSON; MÜLLER-FISCHER; GUENDELMAN, 2006), o Método em Multigrade (STAM, 1999), ou métodos mais simples como o Método de Jacobi e Gauss-Seidel (PATEL, 1994).

Primeiramente vamos analisar o lado direito da Equação 3.25, referente ao cálculo do divergente de  $\vec{u}$ . Utilizando a definição de divergente (Apêndice A.2) e o método de aproximação por derivadas centrais em uma grade MAC obtêm-se:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2,k} - v_{i,j-1/2,k}}{\Delta x} + \frac{w_{i,j,k+1/2} - w_{i,j,k-1/2}}{\Delta x} \quad (3.26)$$

Da mesma forma vamos analisar o lado Esquerdo da equação, agora utilizando a definição do Laplaciano (Apêndice A.3).

$$\Delta t \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla \vec{p} = \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j,k} + p_{i-1,j,k} + p_{i,j+1,k} + p_{i,j-1,k} + p_{i,j,k+1} + p_{i,j,k-1} - 6p_{i,j,k}}{\Delta x^2} \quad (3.27)$$

Isolando a componente de pressão desconhecida  $p_{i,j,k}$ , tem-se:

$$p_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{6} \left( p_{i+1,j,k}^n + p_{i-1,j,k}^n + p_{i,j+1,k}^n + p_{i,j-1,k}^n + p_{i,j,k+1}^n + p_{i,j,k-1}^n - \frac{\rho \Delta x^2 \nabla \cdot \vec{u}}{\Delta t} \right) \quad (3.28)$$

Isto implica que, se o valor do divergente for calculado primeiro utilizando (3.26), a atualização da pressão pode ser computada iterativamente utilizando os seguintes passos para o Método de Jacobi:

para  $n = 0$

$$p^0 = 0$$

para  $n > 0$

$$p_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{6} \left( p_{i+1,j,k}^n + p_{i-1,j,k}^n + p_{i,j+1,k}^n + p_{i,j-1,k}^n + p_{i,j,k+1}^n + p_{i,j,k-1}^n - \frac{\rho \Delta x^2 \nabla \cdot \vec{u}}{\Delta t} \right)$$

Assim que a pressão for calculada a velocidade pode ser atualizada de acordo com (3.20).

$$\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{u}_{i,j,k}^n - \frac{1}{2\rho\Delta x} (p_{i+1,j,k}^{n+1} - p_{i-1,j,k}^{n+1}) \quad (3.29)$$

$$\bar{v}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{v}_{i,j,k}^n - \frac{1}{2\rho\Delta x} (p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j-1,k}^{n+1}) \quad (3.30)$$

$$\bar{w}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{w}_{i,j,k}^n - \frac{1}{2\rho\Delta x} (p_{i,j,k+1}^{n+1} - p_{i,j,k-1}^{n+1}) \quad (3.31)$$

### 3.3.4 Difusão

O termo das equações de Navier-Stokes responsável pela advecção é  $\nu \nabla \cdot \nabla \vec{u}$  e descreve o efeito da troca de massa entre as células vizinhas.

Assim como na advecção, a difusão é adicionada aplicando o método de aproximação por derivadas centrais diretamente no termo responsável pela advecção. Obtendo assim:

$$\Delta \bar{u}_{i,j,k}^{n+1} = \Delta t \nu \frac{1}{\Delta x^2} \left( \bar{u}_{i-1,j,k}^n + \bar{u}_{i+1,j,k}^n + \bar{u}_{i,j+1,k}^n + \bar{u}_{i,j-1,k}^n + \bar{u}_{i,j,k+1}^n + \bar{u}_{i,j,k-1}^n - 6\bar{u}_{i,j,k}^n \right) \quad (3.32)$$

onde,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\Delta x$  a discretização espacial.

Após  $\Delta \bar{u}^{n+1}$  ser computado para todos os pontos da grade, o vetor velocidade é atualizado com relação à difusão:

$$\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{u}_{i,j,k}^n + \Delta \bar{u}_{i,j,k}^{n+1} \quad (3.33)$$

Porém este método é instável para grandes valores de  $\nu$  e  $\Delta t$ . Desta forma na implementação será utilizado outro método para realizar a difusão.

Ao invés de resolver (3.33) utilizando (3.32), a atualização da velocidade devido à difusão é encontrada resolvendo:

$$\bar{u}_{i,j,k}^n = \bar{u}_{i,j,k}^{n+1} - \Delta \bar{u}_{i,j,k}^{n+1} \quad (3.34)$$

Intuitivamente isto pode ser compreendido como a busca pelo vetor velocidade, que ao se realizar o inverso da difusão obtêm-se o vetor velocidade conhecido. Pode-se resolver este problema utilizando o Método de Gauss-Seidel (PATEL, 1994). Ao realizar a discretização utilizando um método de primeira ordem como o das derivadas centrais, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j,k}^n &= \bar{u}_{i,j,k}^{n+1} - \Delta \bar{u}_{i,j,k}^{n+1} \\ &= \bar{u}_{i,j,k}^{n+1} - \frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2} (\bar{u}_{i+1,j,k}^{n+1} + \bar{u}_{i-1,j,k}^{n+1} + \bar{u}_{i,j+1,k}^{n+1} + \bar{u}_{i,j-1,k}^{n+1} \\ &\quad + \bar{u}_{i,j,k+1}^{n+1} + \bar{u}_{i,j,k-1}^{n+1} - 6\bar{u}_{i,j,k}^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Isolando o componente velocidade desconhecido  $\bar{u}_{i,j,k}^{n+1}$ :

$$\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\bar{u}_{i,j,k}^n}{1 + 6a} + \frac{a}{1 + 6a} (\bar{u}_{i+1,j,k}^{n+1} + \bar{u}_{i-1,j,k}^{n+1} + \bar{u}_{i,j+1,k}^{n+1} + \bar{u}_{i,j-1,k}^{n+1} + \bar{u}_{i,j,k+1}^{n+1} + \bar{u}_{i,j,k-1}^{n+1}) \quad (3.36)$$

onde,  $a = \frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2}$ .

Desta forma os passos para a solução iterativa do método numérico pode ser formado como a seguir:

para  $n = 0$

$$\bar{u}_{i,j,k}^0 = 0$$

para  $n > 0$

$$\bar{u}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\bar{u}_{i,j,k}^n}{1+6a} + \frac{a}{1+6a} (\bar{u}_{i+1,j,k}^n + \bar{u}_{i-1,j,k}^n + \bar{u}_{i,j+1,k}^n + \bar{u}_{i,j-1,k}^n + \bar{u}_{i,j,k+1}^n + \bar{u}_{i,j,k-1}^n)$$

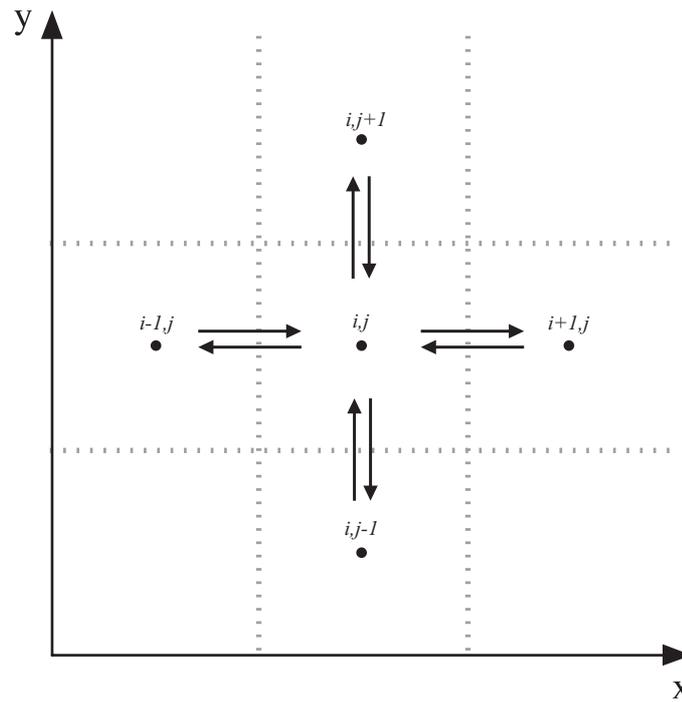


Figura 9: Representação da difusão em duas dimensões

### 3.3.5 O Solucionador

Depois que todos os passos envolvidos na solução foram explanados, será mostrado como organizá-los para obter o solucionador.

O solucionador tratará basicamente de duas grandezas, a velocidade  $\vec{u}$  em toda a grade e a densidade  $\rho$  do fluido. A pressão estará sendo levada em conta implicitamente dentro do procedimento de atualização de pressão e incompressibilidade.

Depois instanciadas as condições iniciais para velocidade e densidade é executada subsequentemente os procedimentos de adição de força, difusão, advecção e atualização de pressão de acordo com a mudança do ambiente. Os algoritmos explanados a seguir representam um único passo do solucionador, o que corresponde ao decorrer de um tempo  $\Delta t$ . O numero de passos executados é indeterminado, e varia de simulação para simulação.

Ao analisar as equações de Navier-Stokes, Stam afirma que “Esta equação indica que as mudanças na densidade em um único passo da simulação ocorrem devido a três causas. O primeiro termo diz que a densidade deve seguir o vetor velocidade, o segundo indica que a densidade deve sofrer difusão de acordo com alguma taxa e o terceiro termo diz que a densidade aumenta devido a alguma fonte. ” (STAM, 2003).

Ao realizar uma abordagem incremental resolve-se este passo do ultimo termo para o primeiro, obtendo assim o seguinte algoritmo para a atualização da densidade.

---

**Algoritmo 1** Atualização da densidade
 

---

```

addforce( $\vec{\rho}$ )
difusion( $\vec{\rho}$ )
advect( $\vec{\rho}$ )

```

---

Assim como para a densidade, Stam afirma que para a atualização da velocidade as equações de Navier Stokes indicam que “a velocidade durante um passo de tempo muda devido à três causas: a adição de forças, difusão viscosa e a advecção da própria velocidade.” (STAM, 2003). Obtemos assim o algoritmo de atualização da velocidade, incluindo o passo de conservação de massa e atualização de pressão, convencionalmente chamado de **Projeção**. Ressaltando que a velocidade é uma grandeza vetorial com três componentes, então tem que realizar os procedimentos acima para cada componente separadamente.

---

**Algoritmo 2** Atualização da velocidade
 

---

```

addforce( $\vec{u}_x$ )
addforce( $\vec{u}_y$ );
addforce( $\vec{u}_z$ );
difuse( $\vec{u}_x$ );
difuse( $\vec{u}_y$ );
difuse( $\vec{u}_z$ );
projection();
advect( $\vec{u}_x$ );
advect( $\vec{u}_y$ );
advect( $\vec{u}_z$ );

```

---

Assim está definido o passo básico do solucionador e no próximo capítulo será explicado como foi realizado a implementação do mesmo.

### 3.3.6 Representação Computacional

Nesta implementação para discretizar o espaço foi utilizado um grade regular com altura, largura e comprimento iguais a 32 unidades. Para representar a velocidade foram utilizados 3 vetores, um para cada componente. A densidade também foi representada como um vetor.

Como este simulador não é independente em relação ao tempo, ou seja, o próximo passo depende da informação do passo anterior. Foram utilizados vetores auxiliares para poder armazenar a grandeza do passo anterior.

## 4 *Experimentos e Resultados*

Alguns métodos de simulação de fluídos demonstrados em seções anteriores foram implementados e seu desenvolvimento e resultados serão explanados à seguir.

O foco desta implementação é simular fluidos difusivos, como por exemplo a fumaça. Assim podemos aplicar os algoritmos de atualização de pressão e densidade descritos na Seção 3.3.5 para realizar esta simulação.

### 4.1 Rotinas

#### 4.1.1 Advecção

A rotina que implementa a advecção foi nomeada de **advect**, como a advecção é realizada para diversas grandezas como a densidade e a própria velocidade, este procedimento recebe uma grandeza genérica e realiza a advecção. Por se tratar de uma simulação de um fluido difusivo, para realizar a difusão foi utilizado o Método Semi-Lagrangiano como visto na Seção 3.3.2.1.

#### 4.1.2 Forças Aplicadas no Fluido

Esta rotina foi chamada de **addforce** e no passo de atualização da densidade, ela é responsável por realizar a adição de densidade em locais desejados do ambiente. Já na atualização de velocidade é responsável por refletir o impacto da inserção de uma força no ambiente. E é implementada utilizando a técnica da Seção 3.3.1.

#### 4.1.3 Difusão

Por ser mais estável o segundo método da Seção 3.3.4 foi utilizado para realizar a difusão. A difusão é aplicada tanto para a densidade quanto para a velocidade. Para

realizar a solução do sistema linear referente à difusão foi utilizado uma implementação do Método de Relaxação de Gauss-Seidel. Os passos para a solução iterativa deste método numérico foram implementados de acordo com a especificação da Seção 3.3.4. Esta rotina recebeu o nome de **diffuse** e no passo da velocidade à difusão ocorre com respeito à viscosidade do fluido e no passo de densidade ela ocorre seguindo a taxa de difusão do fluido.

#### 4.1.4 Projeção

Para esta seção responsável pelo controle da incompressibilidade e atualização da pressão foi dado o nome de **project**. Este nome é associado à este rotina pois ,em álgebra linear, projeção é um operador especial que se você aplicá-lo duas vezes você obtêm o mesmo resultado que aplicá-lo uma única vez, assim como este método.

Na Seção 3.3.3 foi explanado como este método deve ser aplicado, e o solucionador linear utilizado na difusão foi reutilizado nesta etapa.

## 4.2 Visualizador

Nesta seção serão demonstrados alguns resultados encontrados com a implementação desenvolvida.

Outro fator importante na simulação computacional de fluidos é a visualização, pois é através da informação visual que as informações sobre o comportamento da simulação são extraídas. Existem várias técnicas de visualização volumétrica como, por exemplo, o algoritmo de traçado de raios, mas nesta implementação, com o objetivo de com um visualizador simples que consiga extrair informações significativas foram adotadas as seguintes medidas:

- Densidade:

Para poder obter uma boa visualização do comportamento da densidade do fluido durante a simulação, a grandeza densidade foi responsável por determinar transparência da célula correspondente. Desta forma, quanto mais densa é determinada célula mais visível ela será.

- Velocidade:

Para obter uma boa representação da velocidade do sistema foi gerado um campo

de vetores. Cada vetor indica a direção e o sentido da velocidade em cada ponto da grade em um determinado momento. Para obter a informação do módulo da componente velocidade, foi gerado um sistema de escala que varia de ciano a vermelho, representando o menor e o maior módulo, respectivamente.

A partir desta escala todos os módulos foram interpolados para obter sua cor representativa. Com o intuito de obter uma informação mais limpa também foi estipulado um limiar, para que somente fossem mostradas velocidades acima deste limiar, possibilitando assim uma melhor visualização.

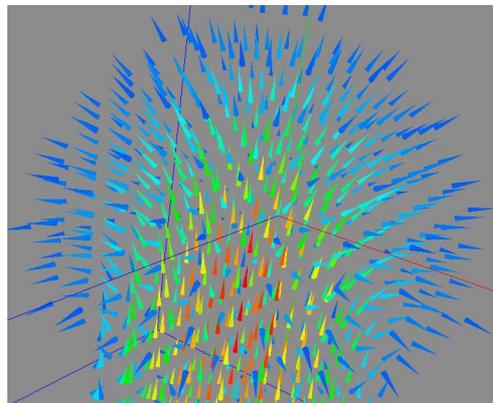


Figura 10: Detalhe da visualização dos vetores de velocidade

## 4.3 Experimentos

Depois de definido e implementado o simulador, foram realizados alguns experimentos para verificar a funcionalidade da implementação e analisar o comportamento do fluido.

Nestes experimentos foram variadas grandezas como velocidade, densidade, fator de difusão, viscosidade e condição de contorno. Nesta seção será denominada fonte, um volume da grade onde será injetado fluido por meio do aumento da densidade naquele local. Suas dimensões serão especificadas em cada experimento.

O valor padrão adotado para da taxa de difusão e viscosidade é igual a zero.

### 4.3.1 Experimento com Paredes Sólidas

Neste primeiro experimento foi definida uma fonte de dimensão unitária, no centro inferior da grade. Também foi definida, envolvendo a fonte, uma área de dimensão igual à  $2 \times 2 \times 2$  com uma velocidade de módulo igual à 5, no sentido do versor  $\hat{j}$ .

A condição de contorno foi estipulada de forma que o fluido ficasse condicionado dentro da grade, para isto foram definidas paredes sólidas (Seç. 2.8.1) em cada face da grade (Fig. 11 e Fig. 12).

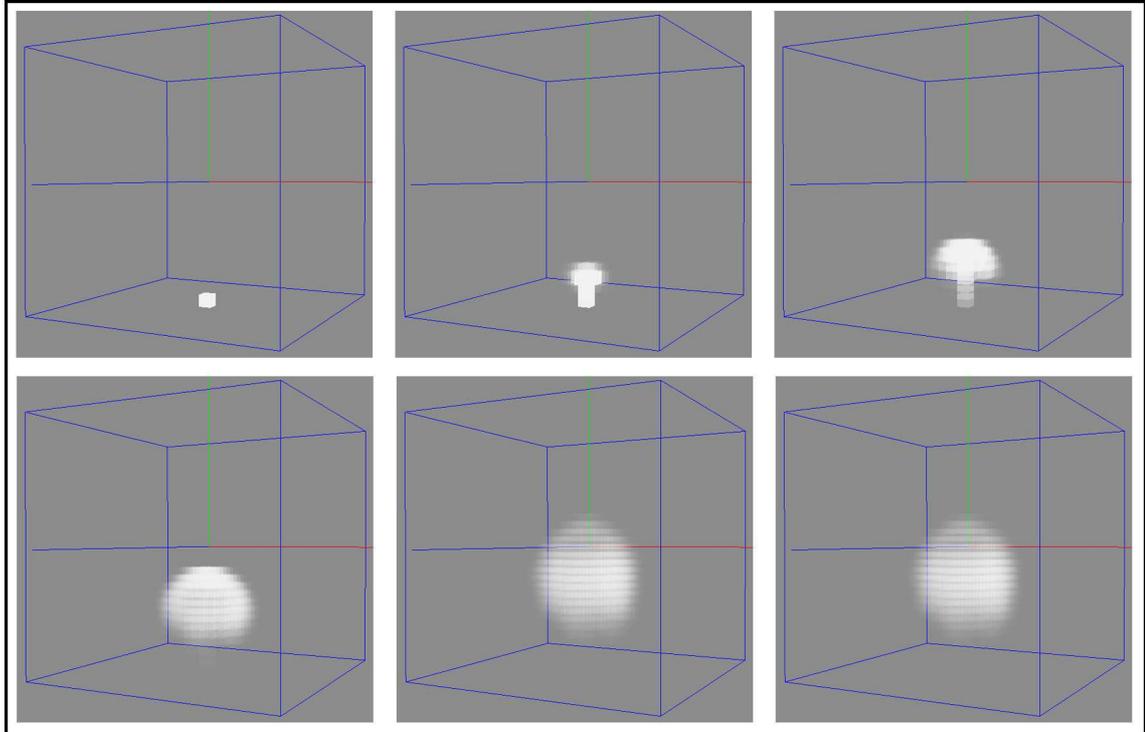


Figura 11: Visualização da densidade do fluido no primeiro experimento

### 4.3.2 Experimento com Superfícies Livres

Utilizando a mesma configuração do experimento anterior serão comparados dois tipos de superfície de contorno. As superfícies livres e as paredes sólidas.

Utilizando paredes sólidas observa-se a formação de vórtices no topo da grade (Fig. 13).

Porém, utilizando superfícies livres não se observa a formação dos vórtices, mas um efeito similar a um exaustor (Fig. 14).

### 4.3.3 Experimento com Variação da Taxa de Difusão e Viscosidade

Primeiramente vamos analisar um fluido com uma taxa de difusão mais alta do que a do primeiro experimento. E como esperado a dissipação é maior quando se utiliza uma taxa de difusão maior (Fig. 15).

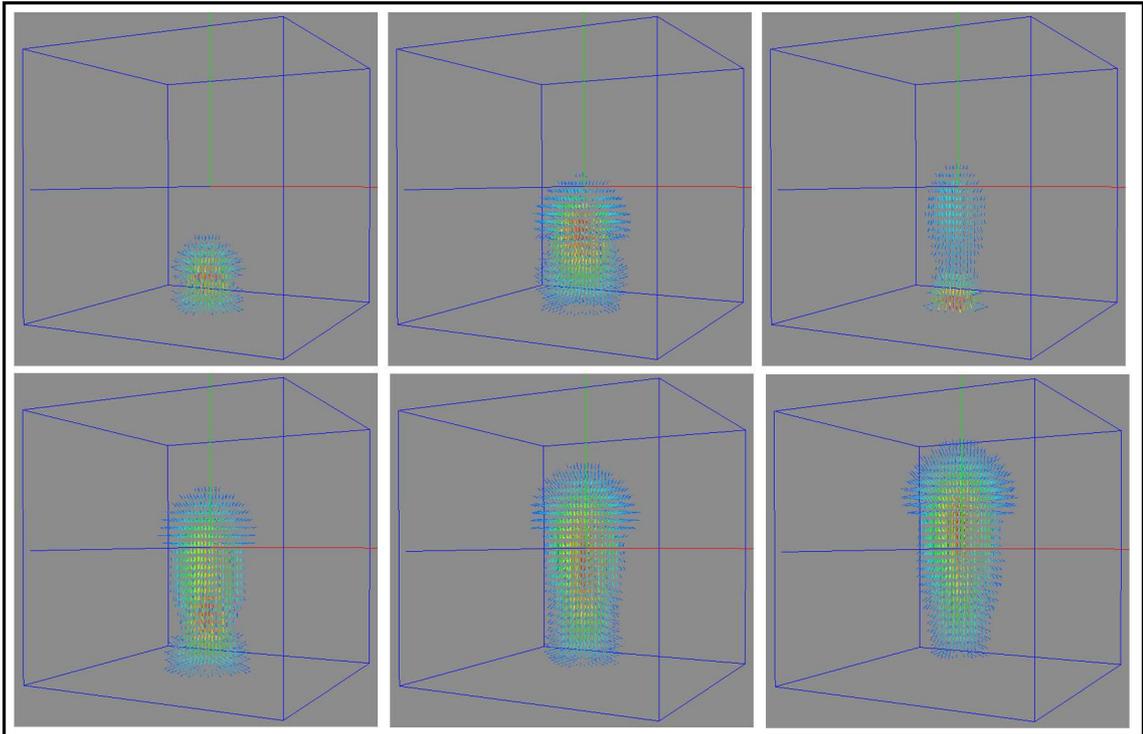


Figura 12: Visualização da velocidade do fluido no primeiro experimento

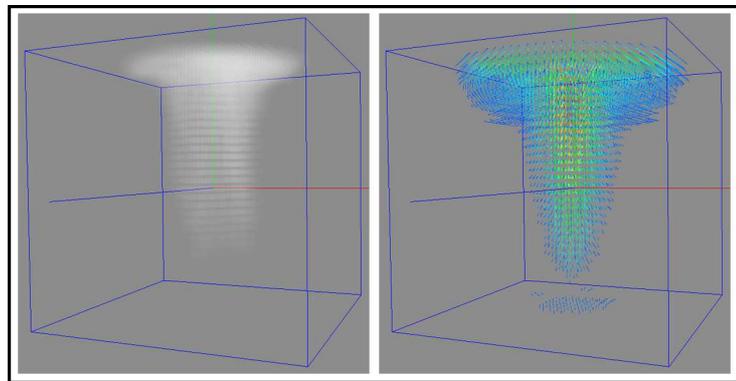


Figura 13: Simulação utilizando a condição de contorno referente à paredes sólidas

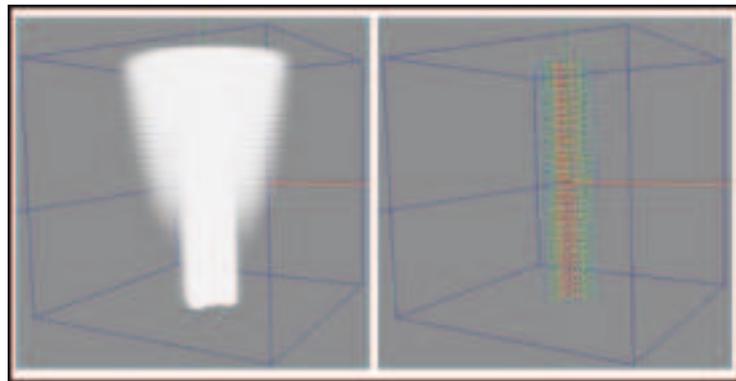


Figura 14: Simulação utilizando a condição de contorno referente à superfícies livres

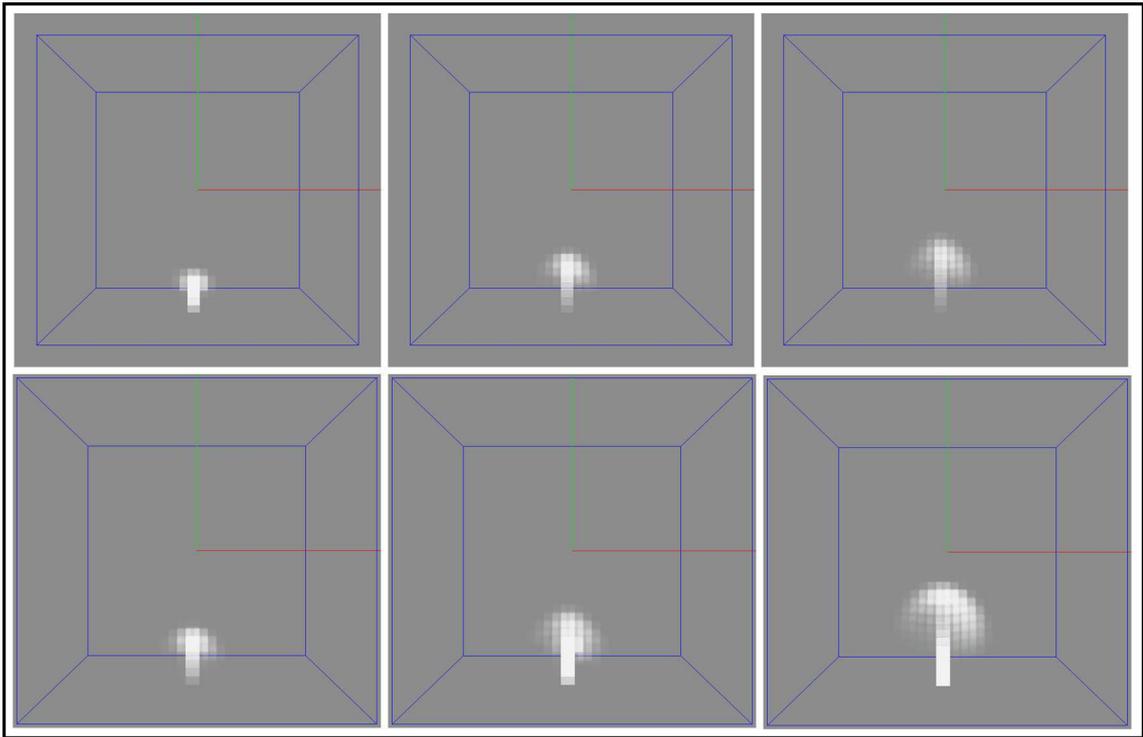


Figura 15: A simulação superior tem uma taxa de difusão 10 vezes maior do que a inferior.

Em seguida ao avaliar a viscosidade observa-se que seu efeito é mais visível no comportamento da velocidade. Em um fluido mais viscoso o movimento tende a ser mais retardado, como de fato ocorre (Fig. 16).

#### 4.3.4 Simulação com Várias Fontes

No quarto experimento será avaliada a simulação do fluido em um ambiente com mais de uma fonte e com vetores velocidades, módulos, direções e sentidos diferentes.

Na Figura 17 podemos observar o fluxo de três fontes distintas devido à um campo de velocidade heterogêneo (Fig. 18).

#### 4.3.5 Simulação de um Ciclone

Para finalizar os experimentos foi realizada uma simulação que visa englobar a maior parte dos conceitos vistos. O objetivo deste experimento é ter uma simulação simplificada de um ciclone, pois o fenômeno é complexo demais para ser modelado perfeitamente. Desta forma estamos simulando apenas uma aproximação para efeitos de ilustração.

Para esta simulação foi definido um movimento circular para os componentes de velocidade. Cada componente foi disposta com o objetivo de formar espiras circulares

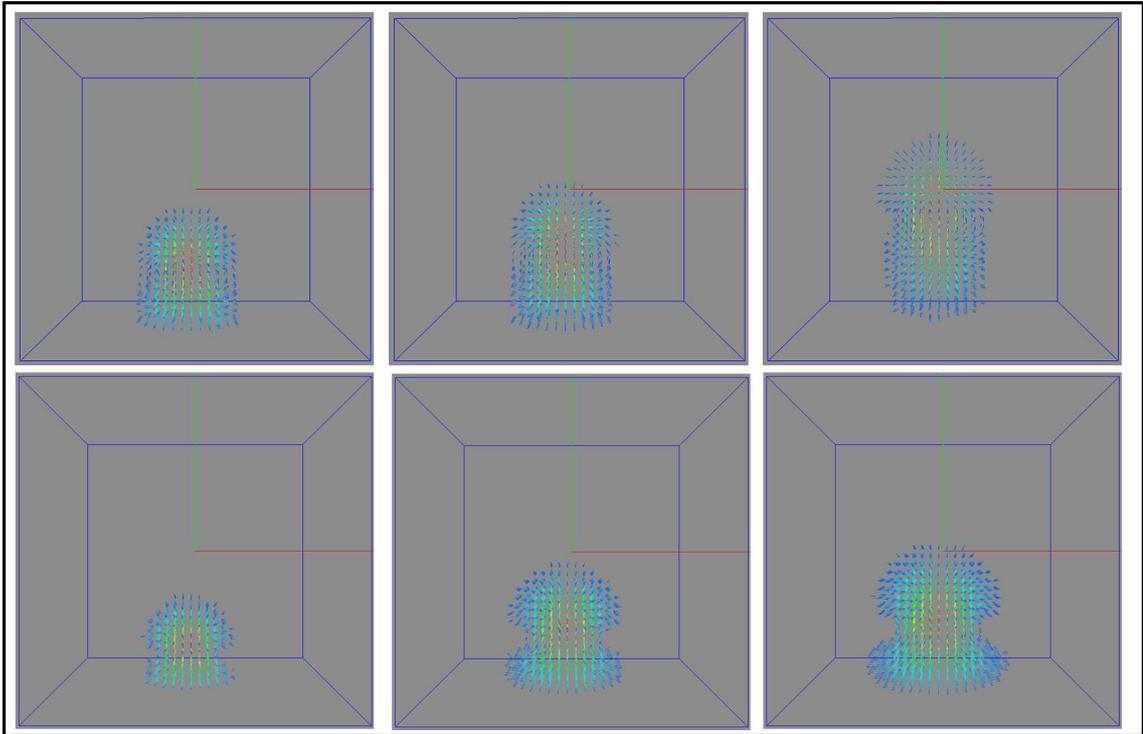


Figura 16: Um fluido menos viscoso no topo e um mais viscoso na base.

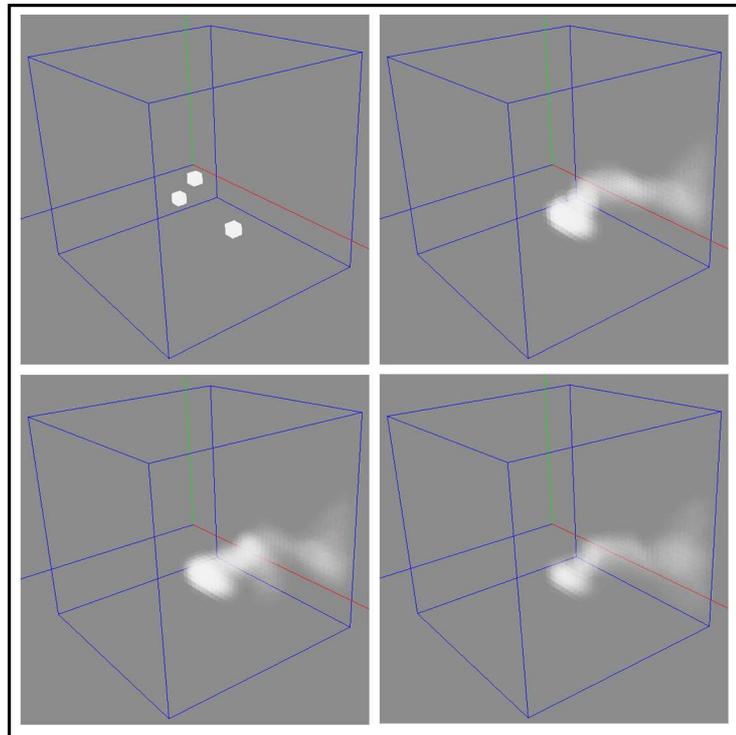


Figura 17: Simulação com 3 fontes distintas.

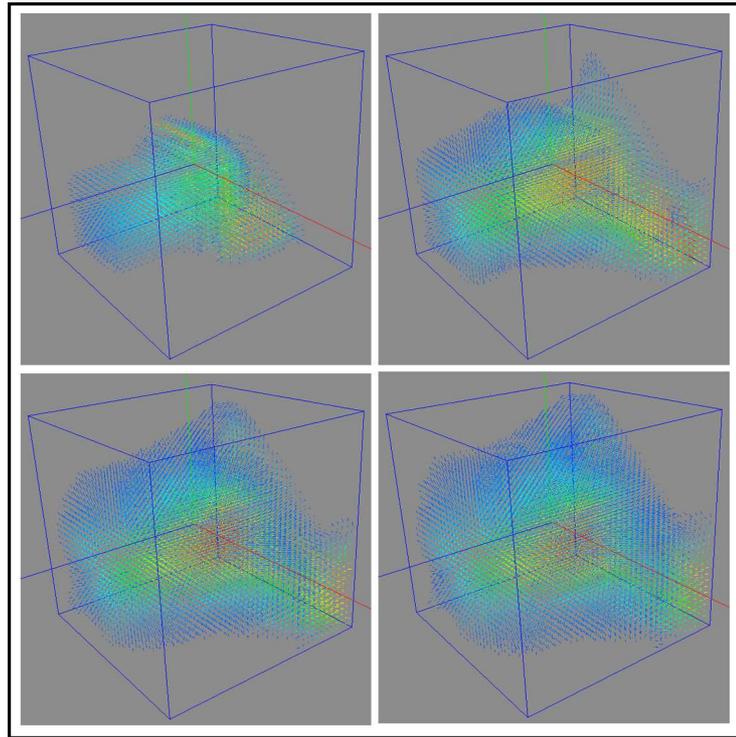


Figura 18: Campo de velocidades.

concêntricas, com os raios variando de 1 à 15 e a velocidade angular da espira igual a  $360^\circ/s$ .

Estas espiras também foram divididas em cinco faixas e o sentido de suas velocidades foi sendo modificados. Formando assim anéis espessos com sentidos alternados. O módulo destas velocidades não foi definido de forma uniforme, inserindo assim mais realismo na simulação (Fig. 20).

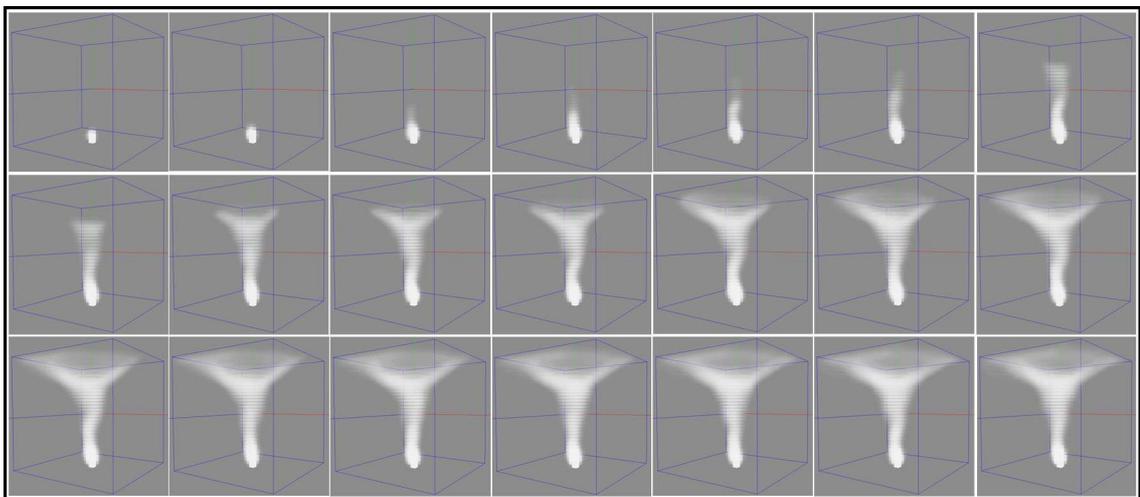


Figura 19: Simulação simplificada de um ciclone.

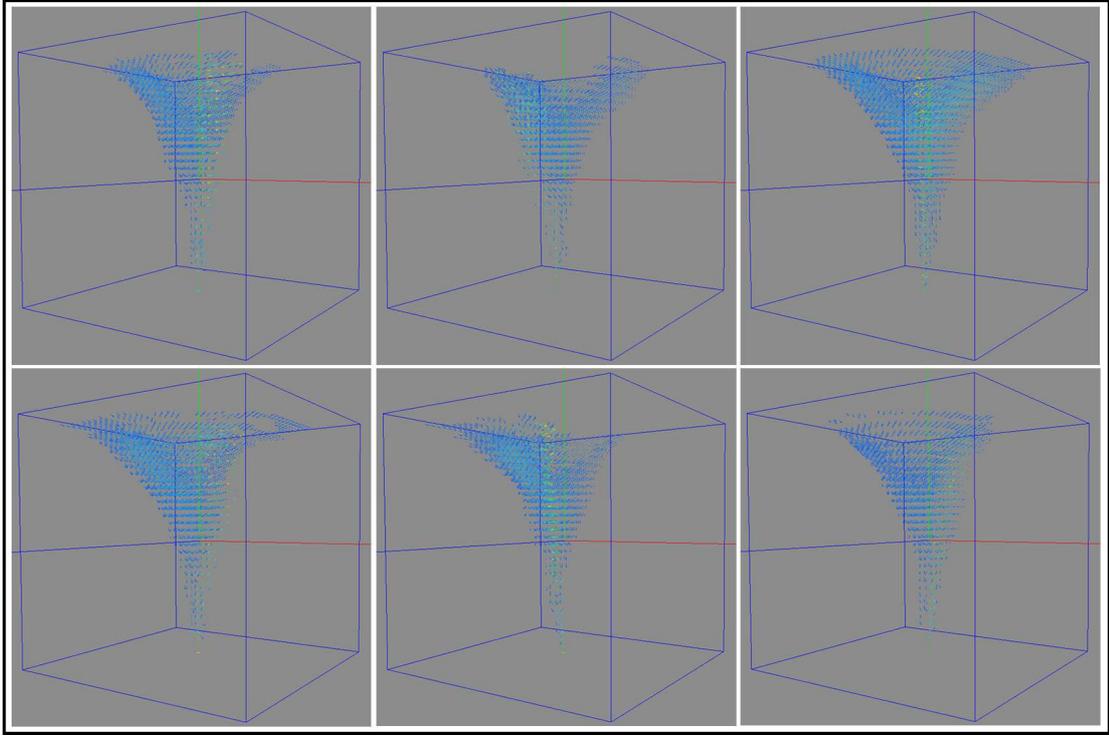


Figura 20: Vetores velocidade.

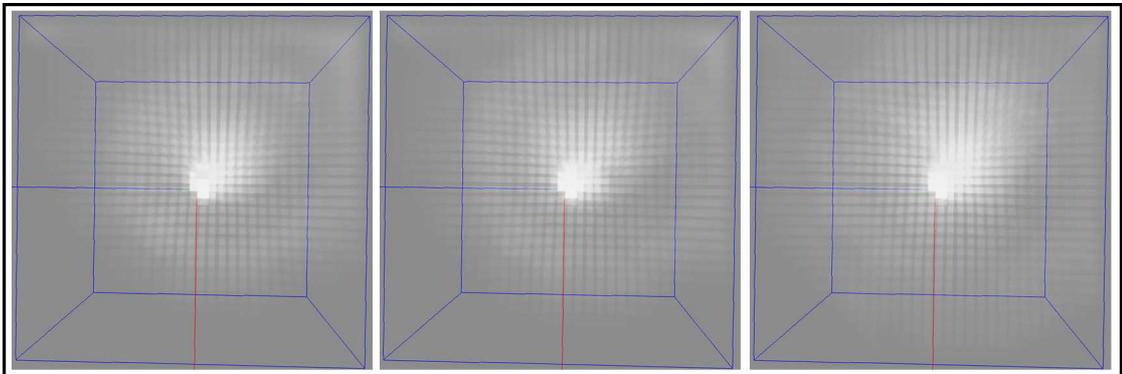


Figura 21: Vista superior da simulação.

## 5 *Conclusão*

Neste trabalho foram estudadas as Equações de Navier-Stokes e apresentada uma forma de resolvê-las numericamente. Também foram demonstrados os modelos computacionais necessários para implementação desta solução.

Exceto algumas imperfeições e simplificações, o método implementado é capaz de simular fluidos difusivos como a fumaça e também simular efeitos advindos do seu movimento.

Porém também foi verificado que este método pode ser melhorado utilizando outros métodos para solução dos sistemas lineares mais fidedignos e estáveis, como o algoritmo do gradiente conjugado pré-condicionado. Devido à complexidade do comportamento dos fluidos, foram necessárias simplificações e aproximações para poder realizar a simulação dentro de um tempo aceitável. Foram apresentados os principais processos que envolvem a dinâmica de fluidos computacional como a advecção e a projeção, sendo ressaltados alguns princípios para a resolução dos mesmos, explicitando seus benefícios e limitações.

Após conceituado, foi indicado uma rotina para aplicação computacional dos métodos e descrita a implementação da mesma. Logo em seguida foi demonstrado o resultado de várias experiências adotando a implementação realizada e apresentados resultados procurando explicitar o comportamento do fluido dado o modelo matemático implementado.

Um grande estímulo para a realização deste trabalho é a grande gama de aplicações da simulação computacional de fluidos que engloba desde simulações de fenômenos físicos como temperatura e aquecimento global; aplicações em simulação de sistemas hidráulicos e inclusive a indústria cinematográfica e de jogos. A parte mais complicada do trabalho foi realizar todos os ajustes para todos métodos convergirem e em conjunto realizarem o proposto.

Para trabalhos futuros podem ser realizadas melhorias no modo de visualização do fluido, utilizando o algoritmo de traçado de raios ou algum outro visualizador de volume. Também podem ser estudadas outras estruturas de armazenamento e visualização como as

*octrees*. Pode também ser estudada a abordagem Lagrangiana, voltadas para simulações em tempo real. Ou mesmo estudadas abordagens mistas como o *Particle-In-Cell Methods*.

# APÊNDICE A – Definições Matemáticas

## A.1 Gradiente

O gradiente de uma função  $f(x, y, z)$ , retorna um vetor com todas as derivadas parciais.

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{A.1})$$

Também pode-se analisar o gradiente como um operador:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.2})$$

Por meio da derivada direcional de uma função  $f$ , o gradiente indica o quão rápido ela está mudando na direção de um vetor particular. Por exemplo, tomando a direção  $\hat{n}$ , tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \hat{n} \quad (\text{A.3})$$

Tomando-se o gradiente de um vetor  $\vec{f} = (f, g, h)$ , temos o **Jacobiano**.

$$\nabla \vec{f} = \nabla(f, g, h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Também denota-se o gradiente como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \quad (\text{A.5})$$

Usando um vetor no denominador, indica-se que a derivada parcial está sendo tomada para cada componente do vetor.

## A.2 Divergente

O operador divergente somente é aplicado em vetores, e mede quanto o vetor está convergindo ou divergindo de um determinado ponto. Desta forma, temos como entrada um vetor e como resultado um escalar.

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Pode-se também pensar o divergente como sendo o produto interno entre o gradiente e o vetor.

$$\nabla \cdot \vec{u} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w \quad (\text{A.8})$$

## A.3 Laplaciano

O Laplaciano mede o quão distante um atributo está da media dos valores à sua volta. Normalmente é tido como o divergente do gradiente. Podendo ser representado como  $\nabla^2$ ,  $\Delta$  ou  $\nabla \cdot \nabla$ . Assim tem-se:

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.9})$$

Ao aplicar-se o Laplaciano a um vetor ou matriz, tem-se o Laplaciano de cada componente separadamente.

A equação diferencial parcial dado por:

$$\nabla \cdot \nabla f = 0 \quad (\text{A.10})$$

É chamada de **Equação de Laplace**, e as funções que respeitam esta condição são denominadas como harmônicas. Se o lado direito for substituído por qualquer valor diferente de zero, temos a **Equação de Poisson**:

$$\nabla \cdot \nabla f = q \quad (\text{A.11})$$

Tendo sua forma geral como:

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla f) = q \quad (\text{A.12})$$

Onde,  $\alpha$  é um escalar qualquer.

## A.4 Derivada Material

Uma partícula  $a_1$  em uma posição  $\vec{v}$  tem uma velocidade  $\vec{u}$ . Analisando um atributo genérico  $q$ , cada partícula terá um valor específico para  $q$ .  $q$  pode ser a densidade, a velocidade, a temperatura ou qualquer outro atributo. A função  $q(t, \vec{x})$  representa o valor de  $q$  no tempo  $t$  na posição fixa no espaço  $\vec{x}$ . A Derivada Material analisa o quão rápido  $q$  está mudando para esta partícula.

A Derivada Material é útil para correlacionar as visões de Euler e Lagrange abordadas na Seção 2.7. Pois ao analisar um atributo  $q$  em uma posição fixa  $\vec{x}$ , estamos lidando com a visão de Euler. E no momento em que se analisa o quão rápido  $q$  está mudando para aquela partícula, aborda-se a visão de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}q(t, \vec{x}) = \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla q \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla q \cdot \vec{u} \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{Dq}{Dt} \quad (\text{A.15})$$

onde  $\frac{\partial q}{\partial t}$ , representa o quão rápido  $q$  está mudando em um ponto fixado no espaço (Um atributo Euleriano). O segundo termo,  $\nabla q \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$ , está corrigindo o quanto desta mudança ocorre devido a diferenças no fluxo que está passando naquele ponto. Por exemplo a temperatura muda por que o ar frio está sendo substituído por ar quente e não por que a temperatura de alguma partícula está sendo modificada.

A Derivada Material também pode ser escrita em sua forma estendida como:

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

onde  $\vec{v} = (u, v, w)$  e  $\vec{x} = (x, y, z)$ .

Para melhor entendimento analisa-se este exemplo em uma dimensão:

Supondo que o atributo analisado seja a temperatura  $T$ , e que

$$T(t, \vec{x}) = 10x$$

e o fluido tem uma velocidade constante  $\vec{u} = c$  em qualquer posição. Ao assumir que

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

significa que a temperatura  $T$  de uma partícula  $a_1$  não está alterando seu valor, está somente se movendo. Expandindo a Derivada Material temos:

$$\begin{aligned} \frac{DT}{Dt} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + 10 \cdot c &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} &= -10 \cdot c \end{aligned}$$

Isto significa que, em um ponto fixo no espaço, a temperatura está mudando em uma razão de  $-10c$ . Se a velocidade é zero,  $c = 0$ , nada muda. Se,  $c = 1$ , a temperatura em um ponto vai cair em uma razão de  $-10$ . E se a velocidade está maior e no sentido contrário,  $c = -2$ , a temperatura naquele ponto do espaço vai crescer em uma razão igual a 20.

Ao aplicar a Derivada Material, em um vetor de quantização como as cores RGB, ou no próprio vetor velocidade  $\vec{u}$ , deve-se tratar cada componente separadamente. Assim o vetor cor  $\vec{c} = (r, g, b)$  tem sua Derivada Material como:

$$\frac{D\vec{c}}{Dt} = \begin{bmatrix} \frac{Dr}{Dt} \\ \frac{Dg}{Dt} \\ \frac{Db}{Dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial t} + \nabla r \cdot \vec{u} \\ \frac{\partial g}{\partial t} + \nabla g \cdot \vec{u} \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla b \cdot \vec{u} \end{bmatrix} = \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \nabla \vec{c} \cdot \vec{u} \quad (\text{A.17})$$

## *Referências*

- BATCHELOR, F. G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: The Press Syndicate of the University of Cambridge, 2002.
- BRIDSON, R.; MÜLLER-FISCHER, M.; GUENDELMAN, E. Siggraph 2006. In: *FLUID SIMULATION - Course Notes*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 113.
- HONG, J.-M.; KIM, C.-H. Discontinuous fluids. *ACM Trans. Graph. (Proc. SIGGRAPH)*, 2005.
- PATEL, V. A. *Numerical Analysis*. [S.l.]: Saunders College Publishing, 1994.
- POZRIKIDIS, C. *Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- STAM, J. Stable fluids. *Proc. SIGGRAPH*, p. 121–128, 1999.
- STAM, J. Real-time fluid dynamics for games. *Proceedings of the Game Developer Conference*, 2003.
- WESSELING, P. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer, 2000.