



Modelagem e implementação por volumes finitos da dinâmica populacional do *Aedes Aegypti*

Pedro Henrique Gasparetto Lugão

JUIZ DE FORA  
SETEMBRO, 2019

# Modelagem e implementação por volumes finitos da dinâmica populacional do *Aedes Aegypti*

PEDRO HENRIQUE GASPARETTO LUGÃO

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação  
Bacharelado em Ciência da Computação

Orientador: Grigori Chapiro

JUIZ DE FORA  
SETEMBRO, 2019

MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO POR VOLUMES FINITOS  
DA DINÂMICA POPULACIONAL DO *Aedes Aegypti*

Pedro Henrique Gasparetto Lugão

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

---

Iury Higor Aguiar da Igreja  
Doutor em Modelagem Computacional

---

Carlos Cristiano Hasenclever Borges  
Doutor em Engenharia Civil

---

Rafael Alves Bonfim de Queiroz  
Doutor em Modelagem Computacional

JUIZ DE FORA  
25 DE SETEMBRO, 2019

*À minha família e amigos.*

*Principalmente à minha mãe, pelo apoio e sustento.*

## Resumo

Busca-se desenvolver neste trabalho uma pesquisa descritiva do comportamento do mosquito *Aedes aegypti* através de dados quantitativos simulados por um sistema computacional. O trabalho justifica-se pelo impacto crescente da disseminação de doenças causadas pela espécie. Espera-se que uma simulação bem desenvolvida possa fornecer informações para tomada de decisão no controle de dengue, zika e chicungunha.

Em um primeiro momento, desenvolve-se um modelo matemático baseado em ideias propostas na literatura e fatores biológicos já conhecidos. Tal modelo será alimentado por dados coletados na literatura, informações a respeito de parâmetros como taxa de maturação dos mosquitos e mortalidade.

Propõe-se em seguida trabalhar com o modelo matemático de um ponto de vista computacional, através de métodos numéricos. Tais métodos, avaliados qualitativamente por meio de um estudo na literatura e quantitativamente por meio de implementações, serão utilizados para a obtenção de resultados teóricos a respeito da proliferação e comportamento dos mosquitos em uma área urbana, modelada com base na cidade de Juiz de Fora.

O trabalho é concluído com uma análise do realismo do modelo, sugerindo alterações como a dependência temporal dos parâmetros para trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** Volumes finitos, *Aedes aegypti*, EDPs.

# Abstract

This work aims to report a descriptive research on the *Aedes aegypti* mosquito behavior with quantitative data obtained from a simulation on a computational system. The motivation for this work comes from the crescent impact of the species in society. We hope that a realistic simulation can provide information that helps decision taking in the control of dengue, zika and chicungunha.

Initially, a mathematical model is developed based on the literature and biological factors. The model will be fed with data also obtained from literature, like maturation and mortality rate.

Finally, we propose to work in the model from a computational point of view through numerical methods. They will be evaluated qualitatively from literature and quantitatively with implementation. Then, the program will be used to simulate the proliferation of mosquitoes in an urban area, modeled on the city of Juiz de Fora.

This work is concluded with an analysis on the realism of the model, suggesting new features for future works.

**Keywords:** Finite volume, *Aedes aegypti*, PDEs.

## Agradecimentos

Agradeço à minha família que sempre me deu apoio mesmo que eu não pudesse estar presente em todos os momentos. Em especial à minha mãe e minha irmã, pela amizade e acolhimento que sempre me deram.

Agradeço aos meus amigos que me acompanharam nessa jornada, desde os que passaram por toda essa experiência comigo até aqueles que estiveram presentes nos demais momentos, de descontração ou desabafos.

Ao professor Grigori pela orientação e motivação ao longo desse último ano, sem as quais esse projeto não seria possível.

Aos demais professores de ambos os departamentos, de Ciência da Computação e Matemática, que estiveram presentes em diferentes momentos da minha formação. Todos contribuíram de diferentes formas para que eu chegasse até aqui.

Agradeço por fim a todos envolvidos nos projetos que participei, desde o GET até o PICME, que me deram um vislumbre do que de fato é a vida acadêmica e me mostraram um caminho que espero continuar seguindo.

*“[...] any model is at best a useful fiction—there never was, or ever will be, an exactly normal distribution or an exact linear relationship. Nevertheless, enormous progress has been made by entertaining such fictions and using them as approximations.”*

*George E. P. Box*

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>7</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Abreviações</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>10</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
1.1 Descrição do Problema . . . . .	11
1.2 Justificativa . . . . .	12
1.3 Objetivos . . . . .	12
1.4 Organização do trabalho . . . . .	13
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>14</b>
2.1 Equações diferenciais . . . . .	14
2.1.1 Dinâmica populacional . . . . .	14
2.1.2 Transporte por difusão . . . . .	15
2.2 Métodos numéricos . . . . .	17
2.2.1 Ordem de convergência . . . . .	18
2.3 Aspectos biológicos do <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	20
<b>3 Revisão Bibliográfica</b>	<b>22</b>
3.1 Dispersão de mosquitos . . . . .	22
3.2 Técnicas de combate à proliferação do mosquito . . . . .	23
3.3 Influências climáticas . . . . .	24
3.4 Métodos numéricos . . . . .	26
<b>4 Modelagem Matemática</b>	<b>27</b>
4.1 Adimensionalização . . . . .	28
<b>5 Volumes finitos</b>	<b>30</b>
5.1 Formulação teórica . . . . .	30
5.2 Aplicação ao modelo . . . . .	31
5.3 Implementação . . . . .	34
5.4 Análise de convergência . . . . .	36
<b>6 Resultados</b>	<b>38</b>
<b>7 Conclusões</b>	<b>42</b>

## Lista de Figuras

2.1	Estêncil do método da Equação (2.10) (esquerda) e do método da Equação (2.11) (direita) . . . . .	18
2.2	Principais fases de vida do <i>Aedes aegypti</i> . . . . .	21
3.1	Mapa da região central de Juiz de Fora (esquerda), o correspondente modelo computacional (centro) e os resultados numéricos da dispersão dos mosquitos (direita) . . . . .	23
3.2	Taxa de mortalidade da fase aquática e de transição entre fase aquática e móvel em função da temperatura. (Yang <i>et al.</i> , 2009) . . . . .	25
5.1	Volume de controle na formulação por volumes finitos. . . . .	32
5.2	Gráficos de $-\log(h) \times \log(E)$ , onde $h$ é a diferença entre $\Delta x$ de duas discretizações e $E$ é o erro calculado entre as discretizações. . . . .	37
6.1	Estado inicial da fase alada em um domínio homogêneo (a) e resultados após 7 dias (b). . . . .	38
6.2	Mapa da região central da cidade de Juiz de Fora (a) e capacidade de suporte $K$ variando no espaço (b). . . . .	39
6.3	Estado inicial da fase alada em bairro de Juiz de Fora (a) e resultados após 365 dias (b). . . . .	39
6.4	Evolução das populações no tempo. . . . .	40
6.5	Evolução das populações no tempo com aplicação de inseticida. . . . .	41

## Lista de Tabelas

4.1	Valores constantes para os parâmetros . . . . .	28
5.1	Análise de convergência com norma L2 . . . . .	37
5.2	Análise de convergência com norma L1 . . . . .	37

## Lista de Abreviações

DCC	Departamento de Ciência da Computação
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
VC	Volume de controle

## Lista de Símbolos

$\Delta t$	Variação no tempo
$\Delta x$	Variação no espaço (x)
$\Delta y$	Variação no espaço (y)
$\nabla \cdot ( \ )$	Operador divergente
$\nabla( \ )$	Operador gradiente
$\Delta( \ )$	Operador laplaciano
$M(x, y, t)$	Densidade da fase alada em ponto do espaço e tempo
$A(x, y, t)$	Densidade da fase aquática em ponto do espaço e tempo
$E(x, y, t)$	Densidade dos ovos em ponto do espaço e tempo
$D$	Taxa de difusão
$\gamma$	Taxa de emergência para fase alada
$k$	Capacidade de suporte
$r$	Taxa de oviposição
$\mu_i$	Taxa de mortalidade natural
$h_i$	Taxa de mortalidade por inseticida

# 1 Introdução

Dengue, zika e chicungunha são problemas frequentes no âmbito da saúde pública brasileira. Apenas no primeiro quadrimestre de 2019, foram registrados 600.305 casos prováveis de dengue no país, em comparação com 123.589 no mesmo período em 2018 (Secretaria de Vigilância em Saúde, 2019). O mapa da distribuição da dengue pelo mundo visto em Bhatt *et al.* (2013) mostra como o Brasil é um dos países mais afetados pela doença.

A disseminação de tais doenças tem sido estudada no meio acadêmico através de análises da dinâmica populacional de seu vetor, o mosquito *Aedes aegypti*, que é muito bem adaptado a áreas urbanas, e principalmente ao clima do Brasil, como discutido em Barreto e Teixeira (2008) e Teixeira (2008).

Este trabalho busca estudar e obter resultados a partir de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento do mosquito *Aedes aegypti* em área urbana. Este estudo envolve desde a modelagem da dinâmica populacional dos insetos até a implementação de um esquema em volumes finitos para a resolução da mesma.

Aspectos como a convergência do método numérico até o significado físico dos resultados apresentados são também pontos a serem discutidos durante a pesquisa.

Destaca-se que o trabalho aqui apresentado foi aceito para apresentação no XXII Encontro Nacional de Modelagem Computacional na forma de artigo e é também parte da pesquisa desenvolvida para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

## 1.1 Descrição do Problema

Enquanto o estudo de dinâmica populacional é realizado com maior frequência através de equações diferenciais ordinárias (com funções dependendo apenas do tempo), este trabalho busca estudar a proliferação dos insetos adicionando um componente espacial à função através de equações diferenciais parciais.

Para isto, propõe-se alterar a modelagem apresentada em Yamashita *et al.* (2018a) a fim de refletir diferentes aspectos biológicos e introduzir novos pontos a serem estudados.

Para a obtenção de uma solução, estuda-se um método numérico chamado volumes finitos, que faz uso das leis de conservação em volumes de controle para discretizar o espaço e possibilitar o cálculo das funções de densidade populacional a partir de um estado inicial

Como exemplo pretende-se estudar uma parte da área urbana de Juiz de Fora, podendo ser também facilmente generalizado através da construção de novos mapas. A escolha da cidade como objeto de estudo inicial busca demonstrar o impacto regional que a pesquisa pode fornecer.

## 1.2 Justificativa

A motivação para a realização deste trabalho se deve principalmente ao perigo que as doenças transmitidas pelo mosquito representam à população. Um maior entendimento dos métodos de controle desses animais seria de grande valia como uma ferramenta de análise para elaboração de políticas públicas buscando o controle do vetor transmissor.

Um diferencial deste trabalho é a proposta de modelagem através de EDP, continuada a partir dos trabalhos desenvolvidos no Laboratório de Matemática Aplicada da UFJF, que propõe abordar aspectos espaciais pouco desenvolvidos no estudo de dinâmica populacional por EDOs.

## 1.3 Objetivos

Busca-se neste trabalho analisar o ciclo de vida e disseminação dos mosquitos, bem como o impacto de estratégias de contenção (com foco nos inseticidas) através de uma simulação computacional, a ser melhor trabalhada durante a pesquisa para aproximá-la ao máximo possível da realidade.

A partir de um modelo bem desenvolvido com parâmetros realistas e um método numérico robusto, novas perguntas podem surgir a respeito de como a estrutura da cidade e utilização de formas de controle populacional podem influenciar na disseminação do mosquito. O objetivo geral do trabalho é desenvolver o ferramental necessário para respondê-las.

A resolução numérica proposta como um objetivo específico se dará a partir do

método de volumes finitos, buscando mesclar a noção de conservação dos mosquitos em meio a sua movimentação com termos fonte e sumidouro representando a alteração da população pontualmente gerada pelo nascimento e mortalidade de novos indivíduos.

## 1.4 Organização do trabalho

O trabalho será desenvolvido da seguinte forma:

No Capítulo 2, será desenvolvida uma fundamentação teórica a respeito de equações diferenciais, métodos numéricos e aspectos biológicos. Em seguida, será estudado no capítulo 3 como tais conceitos são utilizados na literatura em problemas similares.

No Capítulo 4 será exposto o modelo desenvolvido no trabalho, especificando suas principais diferenças em relação aos modelos estudados. Também será feita uma adimensionalização do modelo.

No Capítulo 5 veremos como utilizar a técnica de volumes finitos para obter resolução numérica, bem como a maneira que a técnica foi implementada.

Nos capítulos 6 e 7 apresentaremos resultados obtidos com o ferramental desenvolvido, seguido de conclusões e uma proposta de trabalhos futuros.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Equações diferenciais

A modelagem matemática se baseia em grande parte no uso de equações diferenciais. Desde aspectos biológicos até leis da física, equações que envolvem informações de uma função como taxa de crescimento e curvatura tem se mostrado bastante eficientes para descrever tais fenômenos.

Nesta seção será mostrado como a incógnita de uma equação diferencial, que se dá na forma de uma função, pode ser usada para representar várias grandezas físicas. Serão também discutidos alguns processos de modelagem que serão de importância para os próximos capítulos ao considerar a movimentação de mosquitos.

#### 2.1.1 Dinâmica populacional

É bastante comum a modelagem de crescimento populacional através de EDOs. Segundo Krebs (1978), uma população com um período de reprodução prolongado ou contínuo e com indivíduos que se reproduzem mais de uma vez durante a vida pode ter seu crescimento facilmente modelado através da EDO:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P, \quad (2.1)$$

onde  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  representa a população em um instante de tempo e  $\alpha$  uma taxa de reprodução instantânea. A lógica por trás disso é simplesmente que, quanto maior a população, existem mais indivíduos para se reproduzirem, e portanto o crescimento é proporcional à população atual. Poderíamos adicionar ainda uma mortalidade  $\mu$  ao modelo proporcional à população atual, adicionando um termo  $-\mu P$  no lado direito da equação. De todo modo,  $P$  poderia ser colocado em evidência e uma única constante representaria a taxa de crescimento populacional.

O modelo anterior é capaz de representar bem, por exemplo, uma população de

bactérias, que cresce de forma exponencial enquanto não existe nenhuma limitação no ambiente. Entretanto, em alguns contextos é útil introduzir a ideia de capacidade de suporte, que representa a quantidade máxima de população que um ecossistema permite suportar. Desta forma, a taxa de crescimento passa a ser influenciada pela distância entre a população atual e o máximo suportado:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{P}{K}\right) P, \quad (2.2)$$

onde  $K$  é a população máxima suportada pelo ambiente. Esta equação é chamada de equação logística.

Krebs (1978) aponta algumas críticas à equação logística. Dentre elas há o fato de que algumas populações assumem um comportamento periódico em seu crescimento, que poderia estar associado a um atraso da reação do ambiente em relação ao crescimento populacional fazendo a população oscilar em torno de sua capacidade de suporte. Outro fator interessante, a ser discutido mais tarde no texto, é que muitas espécies possuem um ciclo de vida bem mais complexo, com fases (como ovos e larvas) que possuem propriedades diferentes e podem reagir de diferentes modos à capacidade de suporte do meio.

### 2.1.2 Transporte por difusão

Um outro fenômeno que pode ser modelado por meio de EDPs é o transporte por difusão. Tal fenômeno pode ser visto desde na dispersão de um soluto em um fluido até na propagação do calor em uma superfície. O princípio básico é que um material tende a se mover de onde está mais concentrado para uma região onde está menos concentrado. A mesma ideia é usada para descrever o movimento Browniano, que se caracteriza pela movimentação aleatória de partículas em um fluido ou gás.

Inicia-se a modelagem considerando uma função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que mede a densidade de uma substância em um ponto do espaço (de dimensão  $n$ ). Assim, ao integrar a função no espaço obtém-se uma medida de massa da substância na região de interesse. Um princípio de conservação nos diz que a variação da massa em uma região é dada apenas pelo fluxo da substância que entra ou sai na fronteira. Considerando  $A$  uma região

qualquer e  $\partial A$  a sua fronteira, o princípio pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A u dA = - \oint_{\partial A} F \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.3)$$

onde  $F$  é um vetor representando o fluxo do objeto estudado.

O sinal negativo se deve ao fato da normal  $\mathbf{n}$  apontar para fora da superfície. Pelo Teorema da Divergência de Gauss, o lado direito da equação pode ser substituído pela integral do divergente do fluxo na região. Ainda, considerando a função  $u$  como contínua, obtemos:

$$\iint_A \frac{\partial u}{\partial t} dA = - \iint_A \operatorname{div} F dA, \quad (2.4)$$

$$\iint_A \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} F \right) dA = 0. \quad (2.5)$$

Tem-se como resultado visto em Lima (2002) que, se a integral de uma função contínua é igual a 0 em um domínio arbitrário, a mesma se iguala a 0 em qualquer ponto.

Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} F. \quad (2.6)$$

Agora, como se trata de um processo difusivo, é válido considerar que o fluxo da substância deve ser proporcional ao gradiente da concentração. Deve ter ainda sentido oposto ao mesmo, uma vez que o fluxo vai em direção à região de menor concentração:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(-D\nabla u) = D\Delta u. \quad (2.7)$$

A última igualdade é obtida considerando  $D$  constante no espaço. A equação encontrada é conhecida na literatura por equação do calor ou equação da difusão. Evans (2010) desenvolve a solução analítica desta equação em conjunto com a modelagem descrita.

## 2.2 Métodos numéricos

Nem sempre é trivial (ou até mesmo possível) a obtenção de uma solução analítica para uma ou mais equações diferenciais. Deste modo, introduz-se a ideia de métodos numéricos, que buscam obter resultados aproximados para a equação a partir de uma discretização do espaço. Sua natureza discreta e muitas vezes iterativa incentiva o uso de implementações computacionais que possibilitam a obtenção de resultados em malhas cada vez mais refinadas.

O método numérico a ser utilizado neste trabalho será apresentado nos próximos capítulos. Entretanto, será aqui discutido um método em um problema mais simples para a introdução de alguns conceitos importantes no estudo de formulações mais complexas. Para mais detalhes ver LeVeque (1992).

Consideremos a seguinte EDP com o problema de valor inicial para uma função  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad A \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.9)$$

Discretizamos o espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  em vários pontos  $(x_i, t_j)$  de modo que  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  e  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ . Usamos a notação  $u_i^j$  para representar  $u$  calculada no ponto  $(x_i, t_j)$ . Deste modo, uma forma bastante intuitiva de discretizar a Equação 2.8 é:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + A \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0. \quad (2.10)$$

Isolando  $u_i^{j+1}$  na equação, obtemos uma expressão de  $u$  no ponto  $(x_i, t_{j+1})$  em função de pontos calculados no tempo anterior. Como conhecemos toda  $u(x, 0)$  para todo  $x$ , é natural desenvolver um algoritmo que calcula a função avançando no tempo a partir da expressão obtida. Tal processo é classificado como um método explícito. Apesar de simples, não é um método muito usado por sofrer de problemas com estabilidade da solução final. Outra ideia utilizada é discretizar a derivada espacial fazendo uso dos pontos

no tempo em que se quer calcular a solução:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + A \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} = 0. \quad (2.11)$$

Deste modo, não é possível isolar  $u_i^{j+1}$  de modo a obter uma expressão que utiliza apenas pontos onde a solução já é conhecida. Deve-se então, para cada passo de tempo, resolver um sistema envolvendo todo o domínio espacial para um dado tempo fixo. Este método é classificado como implícito, e possui uma maior estabilidade na solução.

Uma boa maneira de representar os pontos envolvidos na formulação de um método numérico é através do chamado estêncil (do inglês *stencil*). A Figura 2.1 representa os pontos utilizados pelos dois métodos apresentados.

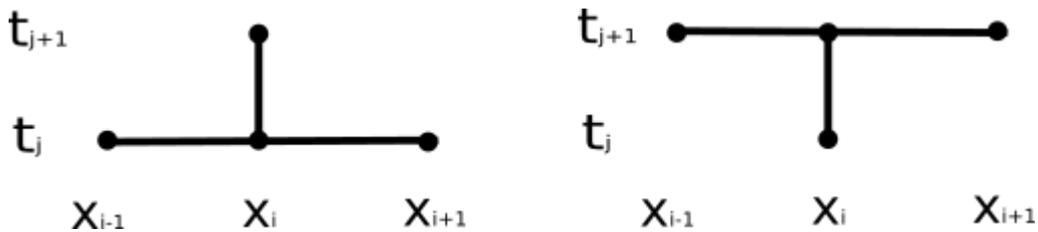


Figura 2.1: Estêncil do método da Equação (2.10) (esquerda) e do método da Equação (2.11) (direita)

Apesar da aparente simplicidade dos métodos apresentados, a utilização de um método só faz sentido quando ele é convergente. Ou seja, sua solução aproximada de fato aproxima a solução real na medida que refinamos a discretização. Em outras palavras, queremos que a diferença entre a solução do método e a solução real convirja para zero quando diminuirmos  $\Delta x$  e  $\Delta t$ . Outro ponto a ser considerado é a velocidade dessa convergência, também representada pela chamada ordem de convergência.

### 2.2.1 Ordem de convergência

Representaremos por  $U_k(x_i, t_j)$  a solução obtida por um método numérico no ponto  $(x_i, t_j)$  utilizando um refinamento de malha  $k = \Delta x = \Delta t$ . Tomemos  $u$  como a função que é de fato solução da equação diferencial. Assim, o erro médio em torno de um ponto pode ser

calculado por:

$$\bar{E}_k(x_i, t_j) = U_k(x_i, t_j) - u(x_i, t_j). \quad (2.12)$$

Considerando uma função erro  $E_k$  em todo o domínio com a sua média em cada região descrita da forma acima, podemos definir que um método é convergente quando

$$\|E_k(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Em outras palavras, para um método ser considerado convergente a sequência de funções  $(U_k)$  deve convergir para uma função  $u$  que é solução da equação.

Vale ainda notar que se utilizarmos uma norma onde o espaço de funções considerado é completo (norma do supremo no espaço de funções contínuas, por exemplo), podemos concluir que a sequência de funções  $(U_k)$  converge para algum  $u$  quando  $k \rightarrow 0$  observando se a mesma é uma sequência de Cauchy ( $\|U_k(\cdot, t) - U_n(\cdot, t)\| \rightarrow 0$ ). Note que o fato desse limite  $u$  ser a solução dessa equação se relaciona com o fato do método ser consistente (que não será explorado nesse trabalho).

Dizemos que um método numérico é de ordem  $p$  quando a sua função de erro associada é  $O(k^p)$ , ou seja:

$$\|E_k(\cdot, t)\| < Ck^p \text{ para algum } C \in \mathbb{R}, \text{ ou} \quad (2.14)$$

$$\|U_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| < Ck^p \text{ para algum } C \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Se assumirmos que o método é convergente, podemos estimar sua ordem de convergência numericamente da seguinte forma: se o método é de ordem  $p$  e tomarmos  $k > n$ , teríamos:

$$\begin{aligned} \|U_k(\cdot, t) - U_n(\cdot, t)\| &< \|U_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| + \|U_n(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \\ &< Ck^p + Cn^p \\ &< 2Ck^p, \end{aligned} \quad (2.16)$$

que pode ser simplificado aplicando logaritmo em ambos os lados da inequação:

$$\log(\|U_k(\cdot, t) - U_n(\cdot, t)\|) < \log(2C) + p \log(k). \quad (2.17)$$

Essa informação nos diz que em um gráfico  $\log \times \log$  relacionando a norma da diferença entre discretizações e  $k$  teremos a ordem de convergência  $p$  como um limitante superior para a inclinação da reta. Isto será usado mais tarde na análise do método numérico implementado.

## 2.3 Aspectos biológicos do *Aedes aegypti*

O ciclo de vida do mosquito pode ser descrito por 4 fases principais: ovo, larva, pupa e alada, como visualizado na Figura 2.2.

Enquanto a espécie necessita apenas de carboidratos extraídos de alimentos como néctar e pólen para sobreviver, as fêmeas necessitam de proteína para a postura dos ovos e fazem uso do sangue humano para suprir esta necessidade. O ovo eclode em contato com a água a partir de dois dias (podendo resistir por meses até estar em boas condições para eclosão), e a larva se desenvolve e alimenta submersa, indo para a superfície apenas para respirar. Após um tempo, a larva se desenvolve em pupa e fica na superfície até emergir para a fase alada (cerca de 8 dias após a eclosão). Neste estado, o mosquito pode percorrer entre cerca de 30 e 600 metros por semana. Mais informações a respeito deste tema podem ser encontradas em Christophers (1960).

É válido destacar que muitos modelos simplificam o ciclo de vida do mosquito unindo fases com características semelhantes. Levando em consideração aspectos espaciais é imprescindível a separação da fase alada das demais, por ser a única capaz de se movimentar livremente. Neste trabalho serão consideradas também uma fase aquática (composta pelas pupas e larvas) e uma fase que compreende os ovos, capazes de sobreviver em diferentes condições mas só eclodindo em contato com água.

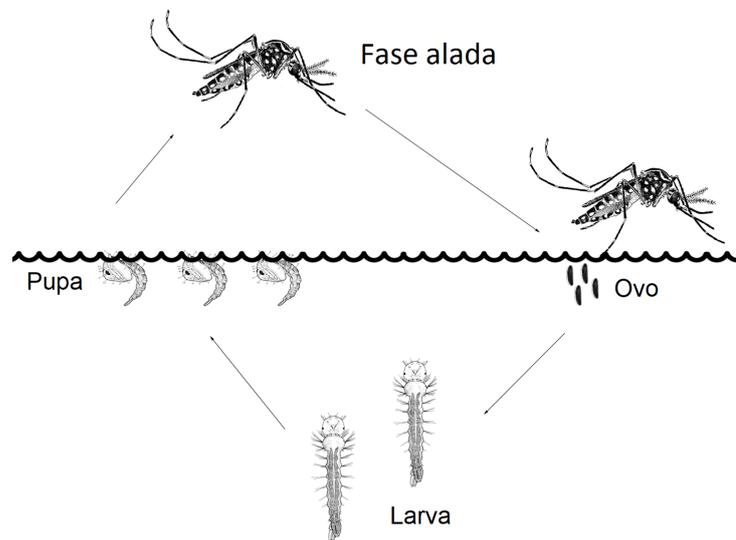


Figura 2.2: Principais fases de vida do *Aedes aegypti*.

## 3 Revisão Bibliográfica

Busca-se descrever neste capítulo abordagens encontradas na literatura para a modelagem da dinâmica populacional do *Aedes aegypti*. As seções são organizadas buscando abordar diferentes aspectos a serem levados em consideração no processo de modelagem deste trabalho: estudo da movimentação dos mosquitos, definição de formas de controle, análise das influências climáticas e, por fim, escolha de um método numérico para obtenção de resultados.

### 3.1 Dispersão de mosquitos

O trabalho de Takahashi *et al.* (2005) é um dos primeiros a introduzir a modelagem por EDPs para a dinâmica populacional do *Aedes aegypti*, considerando uma movimentação difusiva (aleatória) e uma advectiva (guiada pelo vento). Para isto, faz uso do modelo composto pelas equações

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(vM) + \gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) M - (\mu_2 + \gamma) A, \quad (3.2)$$

com as variáveis  $M$  representando a população dos mosquitos fêmeas na fase móvel (mosquitos adultos) e  $A$  representando os mosquitos na fase imóvel (ovos, larvas ou pupas). Consideram-se ainda os parâmetros  $D$  (coeficiente de difusão),  $v$  (velocidade),  $\gamma$  (taxa de transição entre fase imóvel e móvel),  $r$  (tava de oviposição) e os coeficientes de mortalidade para cada fase  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .

Takahashi *et al.* (2005) utilizam um método numérico para estudar soluções de onda viajante (uma solução analítica que representa a conexão entre equilíbrios de um sistema modificado). A partir dos equilíbrios encontrados os autores concluem que o modelo representa bem o fenômeno de invasão biológica.

Yamashita *et al.* (2018b) dão continuidade ao trabalho de Takahashi *et al.* (2005) provando a existência de soluções de ondas viajantes no modelo anterior.

Yamashita *et al.* (2018a) expandem o modelo de Takahashi *et al.* (2005) considerando um espaço bidimensional e adicionando um fator de mortalidade por inseticida em ambas as fases. São obtidos ainda resultados numéricos como o apresentado na Figura 3.1.

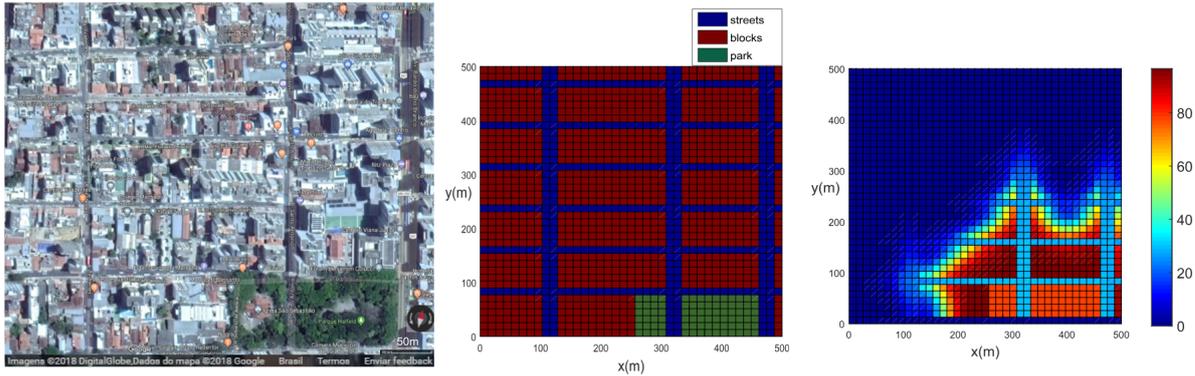


Figura 3.1: Mapa da região central de Juiz de Fora (esquerda), o correspondente modelo computacional (centro) e os resultados numéricos da dispersão dos mosquitos (direita)

O trabalho proposto neste documento busca se basear em Yamashita *et al.* (2018a) para desenvolver uma modelagem e implementação computacional que melhor reflete a realidade, considerando alguns aspectos biológicos sugerem alterações na formulação do modelo.

## 3.2 Técnicas de combate à proliferação do mosquito

Existem diversas formas de combate à proliferação de mosquitos transmissores de doenças. Ferguson (2018) descreve algumas delas, como o uso de inseticidas, modificações genéticas nos mosquitos, e infecção pela bactéria *Wolbachia*.

O modelo desenvolvido por Takahashi *et al.* (2005) é modificado em Yamashita *et al.* (2018a) de forma a incluir um espaço bidimensional e um fator de mortalidade  $h_i$  em ambas as fases para representar a morte por inseticida. Os autores buscam estudar a ação de inseticidas em regiões reais como bairros das cidades de Juiz de Fora e Rio de Janeiro.

Modificações genéticas podem incluir desde a esterilização de mosquitos (machos

estéreis não gerariam crias mas ocupariam um dos ciclos gonotróficos das fêmeas, diminuindo a reprodução) até mesmo modificações que influenciam na taxa de machos/fêmeas dos mosquitos gerados na reprodução (gerando uma população de apenas machos e levando os mosquitos à extinção). Dufourd e Dumont (2013), por exemplo, buscam modelar o controle de mosquitos através da inserção de mosquitos machos estéreis, e para isso também estudam modelos de EDPs.

Thomé *et al.* (2010) estudam como otimizar o uso conjunto de mosquitos estéreis e inseticidas em relação aos custos monetários e sociais. A partir de uma modelagem levando em consideração apenas aspectos temporais, os autores concluem que a utilização das duas técnicas com determinadas proporções são essenciais para minimizar os custos. A técnica de modificação de mosquitos apresenta-se como mais custosa, mesmo sendo mais eficiente.

*Wolbachia* é uma bactéria que é capaz de infectar mosquitos e é transmitida para as crias de uma fêmea infectada. Além disso, uma fêmea não infectada não é capaz de se reproduzir com um macho infectado. A principal vantagem da bactéria é que, como visto em Walker *et al.* (2011), ela torna o mosquito menos eficaz como vetor de doenças. Baseando-se em uma modelagem em EDPs, Almeida *et al.* (2019) estudam a difusão espacial dos mosquitos buscando otimizar a localização de onde serão liberados mosquitos infectados com a bactéria *Wolbachia*.

Ferguson (2018) ainda destaca a dificuldade em eliminar o mosquito transmissor da dengue em relação ao, por exemplo, transmissor da malária. Segundo o autor, isso se deve principalmente ao comportamento mais adaptado à área urbana do *Aedes aegypti*. Faltam evidências rigorosas que suportem o uso de uma técnica de combate mais eficaz. Nesse sentido, simulações computacionais (como a presente neste trabalho) representam um esforço experimental que talvez possa motivar a implementação de políticas públicas não apenas como uma resposta a epidemias, mas como também de forma preventiva.

### 3.3 Influências climáticas

Esperam-se que fatores externos como temperatura, pluviosidade e direção do vento possam influenciar no ciclo de vida do *Aedes aegypti*, desde o desenvolvimento embrionário

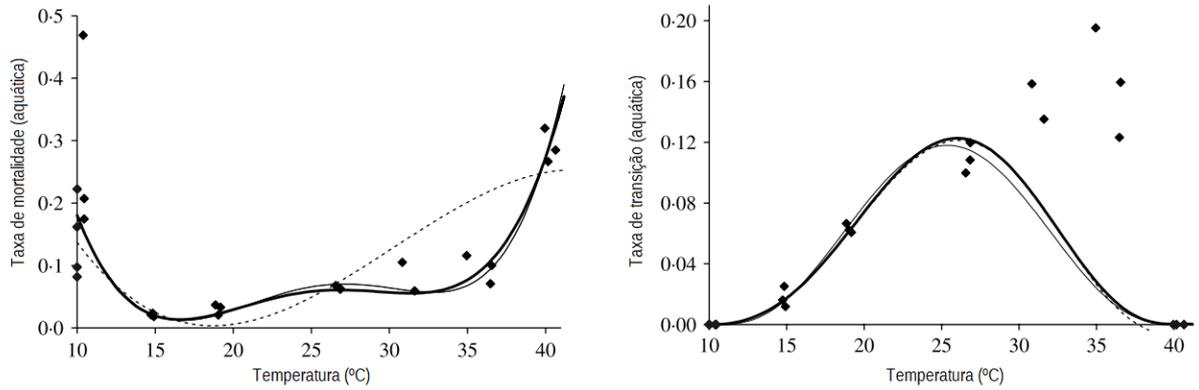


Figura 3.2: Taxa de mortalidade da fase aquática e de transição entre fase aquática e móvel em função da temperatura. (Yang *et al.*, 2009)

até a dispersão da fase adulta. Apesar disso, são poucos os trabalhos que consideram de fato variações no modelo de dinâmica populacional a partir dessas variações climáticas.

Yang *et al.* (2009) estudam como os parâmetros da modelagem como mortalidade e transição entre fases aquática e móvel podem ser influenciados pela variação de temperatura. Para isto, os autores tomam como base um modelo em EDOs com duas fases: a aquática que compreende as fases larva e pupa (deixando a fase ovo implícita no desenvolvimento de parâmetros) e a móvel que corresponde ao mosquito adulto fêmea, considerando que sempre haverá um mosquito macho para possibilitar a reprodução.

Foram realizados experimentos controlados em laboratório para estimar valores em diferentes temperaturas, como visto na Figura 3.2. Mesmo desconsiderando variação dos parâmetros pela temperatura, outros trabalhos utilizam valores base descritos por Yang *et al.* (2009) para simulações computacionais.

Buscando entender como a velocidade do vento pode influenciar na movimentação de mosquitos, Cummins *et al.* (2012) modelam através de um comportamento difusivo-advectivo como ocorre a formação das “plumas de odor”, que guiam os mosquitos até o seu alimento. Este trabalho apresenta informações a respeito do comportamento dos mosquitos que justificam alguns aspectos supostos no modelo de Takahashi *et al.* (2005):

- Os mosquitos não interagem entre si na movimentação e, na falta de informação sobre localização do alimento, eles assumem um comportamento denominado *plume-finding behavior*. Uma das hipóteses é que este é um movimento aleatório, justificando o comportamento difusivo suposto.

- O vento influencia na descoberta das plumas de odor pelos mosquitos, incentivando uma movimentação em sua direção. O transporte passivo do mosquito pelo vento é pouco comum.

Considerando os fatores aqui expostos, o trabalho descrito neste documento busca utilizar as informações fornecidas por Cummins *et al.* (2012), deixando as variações de parâmetros em função da temperatura proposta por Yang *et al.* (2009) como uma motivação para trabalhos futuros.

### 3.4 Métodos numéricos

Outro ponto a ser estudado é como utilizar métodos numéricos para a obtenção de soluções dos modelos. Para este fim, abordagens diferentes podem ser utilizadas, como observado nos trabalhos encontrados.

Yamashita *et al.* (2018a) implementam um método de volumes finitos explícito para a resolução das equações diferenciais parciais. Para o desenvolvimento, foi utilizado o MATLAB. O mesmo *software* foi utilizado por Thomé *et al.* (2010), que fazem uso de uma biblioteca (*bvp4e*) para a resolução de um sistemas de equações diferenciais ordinárias. Dufourd e Dumont (2013) utilizam uma estratégia de *splitting* para mesclar vários métodos numéricos com o apoio do *software SciLab*. Uma outra abordagem é a utilizada por Almeida *et al.* (2019) que, para resolver o problema de otimização desenvolvido, fazem uso da ferramenta *FreeFEM++* que implementa um esquema de elementos finitos.

Propõe-se neste trabalho a utilização de um método de volumes finitos para a simulação dos fenômenos modelados por um sistema de EDPs baseado em Yamashita *et al.* (2018a). Para isto, serão inicialmente utilizados como material de referência os livros de LeVeque (2002) e Versteeg e Malalasekera (2007).

## 4 Modelagem Matemática

Consideramos neste modelo três fases do ciclo de vida dos mosquitos: a densidade da fase alada (móvel) do mosquito fêmea  $M$ , a densidade da fase aquática (larvas e pupas)  $A$  e a densidade da fase ovo  $E$ . Propõe-se esta divisão por conta das peculiaridades da fase ovo que devem ser consideradas no modelo. O ovo pode ser considerado, por exemplo, com mortalidade bem inferior às mortalidades das demais fases, uma vez que resiste por um longo tempo até obter condições ideais para eclodir. Assim, propomos o seguinte modelo:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) + \gamma A - (\mu_1 + h_1) M, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = e \left( 1 - \frac{A}{k} \right) E - (\mu_2 + h_2 + \gamma) A, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = r M - (\mu_3 + h_3 + e) E, \quad (4.3)$$

onde representamos o coeficiente de difusão com  $D$ , a taxa de emergência da fase aquática para fase adulta com  $\gamma$ , a capacidade de suporte da fase aquática com  $k$ , a taxa de eclosão de ovos com  $e$  (ajustada para representar a eclosão de mosquitos fêmeas), a taxa de oviposição com  $r$ , a taxa de mortalidade natural de uma determinada fase com  $\mu_i$ , e a taxa de mortalidade causada pelo uso de inseticidas em cada fase com  $h_i$ .

As seguintes simplificações foram feitas em relação ao modelo proposto por Yamashita *et al.* (2018a), motivadas por um melhor entendimento do comportamento biológico dos mosquitos. Primeiramente, o movimento advectivo (ação do vento) não influencia diretamente no movimento dos mosquitos. Na verdade, sabe-se que o transporte passivo do mosquito pelo vento é pouco comum, e em situações de vento forte os mosquitos se escondem para esperar que a intensidade do vento diminua. Note que também limitamos o uso da capacidade de suporte à fase aquática, uma vez que não há tanta influência nas outras fases em um ecossistema urbano.

Com base nas informações coletadas em Christophers (1960) a respeito dos aspectos biológicos do mosquito, fomos capazes de estimar alguns dos parâmetros encontrados

na Tabela 4.1. O coeficiente de difusão  $D$  foi obtido a partir de um estudo à parte da equação do calor, e a capacidade de suporte  $k$  é uma estimativa inicial que não corresponde completamente ao modelo implementado (mais tarde será visto que será utilizada uma variação no espaço para este caso). Consideramos inicialmente o sistema sem a aplicação de inseticida ( $h_i$ ).

Tabela 4.1: Valores constantes para os parâmetros

$D$	$\gamma$	$k$	$r$	$e$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$h_i$
$111m^2/dia$	$0.125/dia$	$100/m^2$	$6/dia$	$0.5/dia$	$0.1/dia$	$0.1/dia$	$0/dia$	$0/dia$

## 4.1 Adimensionalização

Adimensionalizar um sistema é importante por algumas razões. Primeiramente, impede que cometamos erros ao realizarmos operações nas equações. Operar termos com unidades diferentes pode ocasionar em operações mal definidas e sem um sentido físico. Além disso, ao remover dimensões das variáveis podemos colocá-las em uma mesma ordem de grandeza, facilitando operações entre elas e diminuindo a possibilidade de erros numéricos.

Tomemos então o modelo definido anteriormente (com  $D$  constante no espaço):

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\Delta M + \gamma A - (\mu_1 + h_1)M \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = e \left(1 - \frac{A}{k}\right) E - (\mu_2 + h_2 + \gamma)A \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = rM - (\mu_3 + h_3 + e)M \quad (4.6)$$

Vamos definir as variáveis adimensionais  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{E}$  e  $\bar{M}$  de modo que:

$$x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y},$$

$$t = T\bar{t}, \quad A = P\bar{A},$$

$$E = P\bar{E}, \quad M = P\bar{M},$$

onde  $T$ ,  $L$  e  $P$  são quaisquer valores de referência para tempo, comprimento de uma região e população, respectivamente. Para facilitar, podemos sempre definir  $L$  como o lado de

um quadrado que contém a região de interesse no espaço. O valor de referência  $T$  pode ser simplesmente fixado em 1 dia, de modo que as variáveis  $t$  e  $\bar{t}$  possuam a mesma magnitude. Para a escolha de  $P$ , pode-se tomar um valor próximo de  $k$  para garantir que a função  $\bar{A}$  tenha sua imagem contida em  $[0, 1]$ , enquanto  $\bar{M}$  e  $\bar{E}$  representam o quão maior ou menor são as demais populações em relação à capacidade de suporte da fase aquática.

Trocando as variáveis através da regra da cadeia, obtemos um novo sistema de equações com as novas variáveis:

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{t}} = \frac{DT}{L^2} \Delta \bar{M} + \gamma T \bar{A} - T(\mu_1 + h_1) \bar{M}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} = eT \left(1 - \frac{P}{k} \bar{A}\right) \bar{E} - T(\mu_2 + h_2 + \gamma) \bar{A}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} = rT \bar{M} - T(\mu_3 + h_3 + e) \bar{E}. \quad (4.9)$$

Podemos definir os parâmetros adimensionais:

$$\bar{r} = Tr, \quad \bar{\gamma} = T\gamma, \quad \bar{e} = Te, \quad \bar{h}_i = Th_i, \quad \bar{\mu}_i = T\mu_i, \quad \alpha = \frac{DT}{L^2}, \quad \beta = \frac{P}{k}.$$

Com isto, obtemos um sistema completamente adimensional:

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{t}} = \alpha \Delta \bar{M} + \bar{\gamma} \bar{A} - (\bar{\mu}_1 + \bar{h}_1) \bar{M}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} = \bar{e} (1 - \beta \bar{A}) \bar{E} - (\bar{\mu}_2 + \bar{h}_2 + \bar{\gamma}) \bar{A}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} = \bar{r} \bar{M} - (\bar{\mu}_3 + \bar{h}_3 + \bar{e}) \bar{E}. \quad (4.12)$$

A partir de agora, usaremos  $M$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $x$ ,  $y$  e  $t$  para nos referirmos às variáveis adimensionais (sem o uso da barra), assim como  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $e$ ,  $r$ ,  $\mu_i$  e  $h_i$  para os parâmetros sem dimensões.

## 5 Volumes finitos

### 5.1 Formulação teórica

Assim como os demais métodos numéricos, o método de volumes finitos se baseia em discretizar o domínio de uma equação diferencial para resolvê-la. Entretanto, a principal diferença é a maneira que a função é considerada nessa discretização. Tomemos como exemplo a equação trabalhada anteriormente no Capítulo 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad A \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (5.2)$$

Para trabalhar nessa discretização, consideremos que o valor da função aproximada  $\bar{u}$  é na verdade a média da função em uma região (chamada de volume de controle) ao redor de cada ponto na discretização espacial ( $x_i$ ):

$$\bar{u}(x_i, t_j) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_j) dx. \quad (5.3)$$

Para incluir a função aproximada na EDP, basta integrar a Equação 5.1 no que chamaremos de volume de controle (a região no domínio espacial relativa a cada ponto da discretização):

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx = -(Au)|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x_i, t) = \frac{1}{\Delta x} [Au(x_{i-1/2}, t_j) - Au(x_{i+1/2}, t)]. \quad (5.6)$$

Para remover a derivada no tempo, integramos em t:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x_i, t) dt = \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t_j}^{t_{j+1}} Au(x_{i-1/2}, t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} Au(x_{i+1/2}, t) dt \right], \quad (5.7)$$

$$\bar{u}(x_i, t_{j+1}) - \bar{u}(x_i, t_j) = \frac{1}{\Delta x} (F^{i-1/2} - F^{i+1/2}). \quad (5.8)$$

A letra F para se referir às integrais do lado direito da equação representam a noção de fluxo. Nesse sentido, os volumes finitos refletem o comportamento conservativo descrito em capítulos anteriores. A variação da quantidade de matéria em uma região depende apenas do fluxo do material em sua fronteira. Para o cálculo deste fluxo, é possível aproximar o valor da integral da seguinte forma:

$$F^i = \int_{t_j}^{t_{j+1}} Au(x_i, t) dt \approx \Delta t \cdot ((1 - \theta)Au(x_i, t_j) + \theta Au(x_i, t_{j+1})). \quad (5.9)$$

Sabe-se que, pelo teorema do valor médio, algum  $\theta \in [0, 1]$  resultará em exatamente o valor da integral procurado. Como não é possível descobrir qual é esse  $\theta$  em qualquer caso, opta-se por escolher algum valor fixo para utilizar na obtenção de solução. Sobre isso, podemos ressaltar alguns valores comuns:  $\theta = 0$  utiliza o valor no tempo atual, resultando em um método explícito;  $\theta = 1$  considera o valor no tempo ainda a ser calculado, se caracterizando como um método implícito;  $\theta = 0.5$  é bastante comum como o método de Crank-Nicolson e é consideravelmente mais estável que os anteriores.

Enquanto o modo que a função será calculada nos pontos  $x_{i+1/2}$  e  $x_{i-1/2}$  fica ainda em aberto pela formulação (podendo ser por exemplo uma combinação entre pontos vizinhos conhecidos), é possível isolar  $\bar{u}(x_i, t_{j+1})$  na expressão desenvolvida anteriormente para a obtenção de um método numérico. Mais detalhes a respeito da formulação unidimensional podem ser vistos em LeVeque (2002). A seguir, será desenvolvida uma formulação semelhante bidimensional para o modelo proposto neste trabalho.

## 5.2 Aplicação ao modelo

Utilizamos uma formulação por volumes finitos bidimensional para obter uma expressão de  $\frac{\partial M}{\partial t}$  na forma de EDO, e usamos um esquema de Crank-Nicolson para esta e demais

equações ao desenvolver um método numérico de resolução.

Primeiramente, integramos a Equação (4.10) em um volume de controle de centro  $(x_i, y_i)$  limitado pelas faces intermediárias vistas na Figura 5.1.

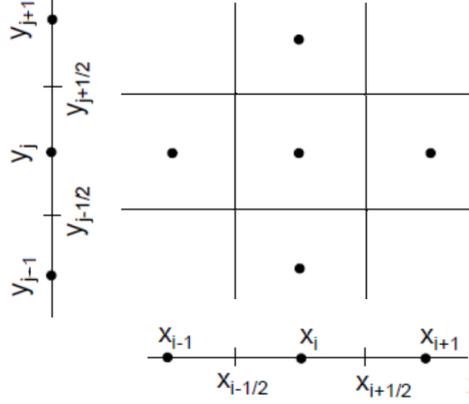


Figura 5.1: Volume de controle na formulação por volumes finitos.

Considerando  $\bar{F}$  como o valor médio de  $F$  obtido pelo Teorema do Valor Médio no volume de controle, fomos capazes de obter o seguinte desenvolvimento:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial M}{\partial t} dy dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [\nabla \cdot (\alpha \nabla M) + \gamma A - (\mu_1 + h_1) M] dy dx; \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \Delta x \Delta y = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \nabla \cdot (\alpha \nabla M) dy dx + [\gamma \bar{A} - (\mu_1 + h_1) \bar{M}] \Delta x \Delta y. \quad (5.11)$$

Analisando apenas o termo de difusão, temos:

$$D(M_{ij}) = \iint_{VC} \nabla \cdot (\alpha \nabla M) dy dx = \iint_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \alpha \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \alpha \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \quad (5.12)$$

$$= \iint_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \alpha \frac{\partial M}{\partial x} dx dy + \iint_{VC} \frac{\partial}{\partial y} \alpha \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \quad (5.13)$$

$$= \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[ \alpha \frac{\partial M}{\partial x} \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dy + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[ \alpha \frac{\partial M}{\partial y} \right]_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dx \quad (5.14)$$

$$= \left[ \alpha \frac{\partial \bar{M}}{\partial x} \right] \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta y + \left[ \alpha \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} \right] \Big|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \Delta x. \quad (5.15)$$

Finalmente, para obter uma expressão para  $D(M_{ij})$  consideramos que  $\alpha$  é cons-

tante no espaço e

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial x} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{\bar{M}(x_{i+1}, y_j) - \bar{M}(x_i, y_j)}{\Delta x} - \frac{\bar{M}(x_i, y_j) - \bar{M}(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x} \quad (5.16)$$

$$= \frac{\bar{M}(x_{i+1}, y_j) - 2\bar{M}(x_i, y_j) + \bar{M}(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x}, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial y} \Big|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} = \frac{\bar{M}(x_i, y_{j+1}) - \bar{M}(x_i, y_j)}{\Delta y} - \frac{\bar{M}(x_i, y_j) - \bar{M}(x_i, y_{j-1})}{\Delta y} \quad (5.18)$$

$$= \frac{\bar{M}(x_i, y_{j+1}) - 2\bar{M}(x_i, y_j) + \bar{M}(x_i, y_{j-1})}{\Delta y}. \quad (5.19)$$

Assim, temos a primeira equação do modelo na forma de uma EDO. Agora o sistema possui apenas equações para a derivada no tempo. Note que notações como  $M(x_i, y_j)$  não incluem a variável temporal, porque até este ponto consideramos um tempo fixo. Agora, usaremos a notação  $M_{ij}^t$  para indicar a solução calculada em  $(x_i, y_j, t)$ .

Aproximamos as funções contínuas  $M(x, y, t)$ ,  $E(x, y, t)$ ,  $A(x, y, t)$  pelas funções degrau (*step function*)  $\bar{M}(x, y, t)$ ,  $\bar{E}(x, y, t)$ ,  $\bar{A}(x, y, t)$  que são constantes em cada volume de controle e iguais às médias das funções originais nessas regiões. Assim, integrando também a Equação (4.11) e a Equação (4.12) temos o sistema:

$$\frac{\partial \bar{M}_{ij}^t}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} D(\bar{M}_{ij}^t) + \gamma \bar{A}_{ij}^t - (\mu_1 + h_1) \bar{M}_{ij}^t = F_1(\bar{M}_{ij}^t, \bar{A}_{ij}^t), \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \bar{A}_{ij}^t}{\partial t} = e(1 - \beta \bar{A}_{ij}^t) \bar{E}_{ij}^t - (\mu_2 + h_2 + \gamma) \bar{A}_{ij}^t = F_2(\bar{A}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t), \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_{ij}^t}{\partial t} = r \bar{M}_{ij}^t - (\mu_3 + h_3 + e) \bar{E}_{ij}^t = F_3(\bar{M}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t), \quad (5.22)$$

Agora, usando o método de Crank-Nicolson, obtemos definições implícitas para os valores de  $\bar{M}$ ,  $\bar{A}$  e  $\bar{E}$  no tempo seguinte (t+1) considerando que se sabe os valores no

tempo atual (t):

$$\bar{M}_{ij}^{t+1} = \bar{M}_{ij}^t + \frac{\Delta t}{2}(F_1(\bar{M}_{ij}^t, \bar{A}_{ij}^t) + F_1(\bar{M}_{ij}^{t+1}, \bar{A}_{ij}^{t+1})), \quad (5.23)$$

$$\bar{A}_{ij}^{t+1} = \bar{A}_{ij}^t + \frac{\Delta t}{2}(F_2(\bar{A}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t) + F_2(\bar{A}_{ij}^{t+1}, \bar{E}_{ij}^{t+1})), \quad (5.24)$$

$$\bar{E}_{ij}^{t+1} = \bar{E}_{ij}^t + \frac{\Delta t}{2}(F_3(\bar{M}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t) + F_3(\bar{M}_{ij}^{t+1}, \bar{E}_{ij}^{t+1})), \quad (5.25)$$

A cada passo de tempo precisamos resolver um sistema de equações não lineares envolvendo valores das 3 funções considerando todo o domínio espacial da função M. Note que as equações são acopladas pelo termo difusivo  $D(\bar{M}_{ij}^t)$ . Em nossa formulação, optamos pelo uso do método de Newton para a resolução de sistemas não lineares visto em Broyden (1965). Tal escolha é justificada por estarmos tratando de uma não linearidade quadrática, e a informação de primeira ordem utilizada pelo método de Newton é suficiente para uma convergência rápida. Utilizamos como ponto inicial do método os valores das funções no tempo atual.

## 5.3 Implementação

O código implementado foi desenvolvido em MATLAB e executado por uma máquina com um processador *Intel Core i7-4770* e 16GB de memória RAM. Com esta configuração e com a máquina dedicada à execução do código, a maioria dos testes foi realizada em poucos minutos. Outro ponto a ser observado a respeito da implementação da formulação proposta é o uso da condição de fronteira de Neumann, considerando que o fluxo na fronteira do domínio espacial (representado por uma malha computacional limitada, portanto com fronteira) é nulo. Com isso em mente, podemos começar a apresentar alguns detalhes da solução desenvolvida.

Inicialmente, assumimos que a implementação possui como entrada um mapa quadriculado atribuindo valores a diferentes regiões para indicar se trata de uma rua, bloco de casas ou uma área com bastante vegetação. Tal distinção é usada para variar a capacidade de suporte da fase aquática. A implementação permitiria variar espacialmente qualquer parâmetro (mesmo que eles não tenham sido definidos como variáveis na for-

mulação teórica), mas neste momento não desenvolveremos essa ideia. Os estados iniciais da densidade populacional das fases do *Aedes aegypti* são também dados de entrada, em matrizes com as mesmas dimensões que o mapa definido anteriormente.

Apesar da formulação por Crank-Nicolson descrita anteriormente, a implementação foi realizada tentando flexibilizar o modelo. Para isto, é introduzido um parâmetro  $\theta$  que serve como um peso para a combinação entre uma resolução implícita e explícita. Com  $\theta = 0$  obtemos a formulação explícita e com  $\theta = 1$  obtemos a implícita. O método de Crank-Nicolson é definido por  $\theta = 0,5$  (atribuindo pesos iguais as formulações explícita e implícita). Outros valores intermediários entre 0 e 1 também são possíveis, atribuindo um peso  $\theta$  à formulação implícita e  $(1 - \theta)$  à explícita.

Após a leitura dos dados de entrada, o algoritmo define os parâmetros associados ao comportamento do método como  $\theta$ , as dimensões do espaço,  $\Delta t$  e o tempo final. Assim, o Algoritmo 1 descreve resumidamente o funcionamento do código, que simplesmente itera no tempo resolvendo o sistema não linear desenvolvido no capítulo anterior.

---

**Algoritmo 1:** Resolução numérica

---

**Entrada:** Mapa,  $M_0$ ,  $A_0$ ,  $E_0, \theta, \Delta t$

**Saída:** M, A, E

**início**

$t = 0$ ;

$M = M_0$ ,  $A = A_0$ ,  $E = E_0$ ;

    parâmetros = definirParâmetros(Mapa);

**enquanto**  $t < t_f$  **faça**

        M, A, E = resolverSistema(M,A,E, $\theta$ ,parâmetros);

$t = t + \Delta t$ ;

**fim enqto**

**retorna** M, A, E

**fim**

---

Para a resolução do sistema não linear faz-se uso do método de Newton, como já dito anteriormente. Considerando que a malha espacial discretizada possui  $n \cdot m$  pontos, representamos o sistema como uma aplicação  $F : \mathbb{R}^{3nm} \rightarrow \mathbb{R}^{3nm}$  (uma vez que envolve todos os pontos espaciais nas três fases em um determinado espaço de tempo). É então construída a matriz jacobiana do sistema (obtida analiticamente) e a resolução se dá por meio do algoritmo iterativo descrito no Algoritmo 2.

Ao fim da simulação, é possível gerar gráficos da população total ao longo do

**Algoritmo 2:** Método de Newton para sistemas não lineares**Entrada:**  $F, X_0$ .**Saída:**  $X$  tal que  $F(X) \approx 0$ **início**     $X = X_0$ ;    **repita**         $dF = \text{calcularJacobiano}(X)$ ;         $\text{passo} = -dF^{-1} \cdot F(X)$ ;         $X = X + \text{passo}$ ;    **até**  $\|\text{passo}\| < 10^{-6}$ ;**fim**

tempo, bem como os estados finais da densidade populacional de cada uma das fases. A geração de animações representando o processo de evolução também foi desenvolvida, sempre levando em consideração que as variáveis adimensionais devem ser convertidas às suas correspondentes dimensionais para exibição da solução.

## 5.4 Análise de convergência

Primeiramente, estudamos a convergência do método numericamente. Para isto, utilizamos a implementação do esquema previamente descrito simulando um período de 1 dia. Usando os valores constantes presentes na Tabela 4.1, a convergência é analisada decrementando o passo de tempo  $\Delta t$  e refinando a malha espacial (1m x 1m) controlando os valores de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  simultaneamente.

Para o estudo da convergência do método, fizemos uso de cinco discretizações do espaço e tempo para a execução do método:

- 1: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,5$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,1$ .
- 2: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,25$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,05$ .
- 3: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,125$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,025$ .
- 4: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,0625$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,0125$ .
- 5: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,03125$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,00625$ .

Indicamos por  $E_{ij}$  a norma do erro entre as funções no tempo  $t = 1$  calculadas nas discretizações  $i$  e  $j$ , considerando apenas pontos comuns a todas as malhas espaciais.

ais. Realizando tal cálculo para  $M(x, y, t)$ ,  $A(x, y, t)$  e  $E(x, y, t)$ , obtemos os resultados indicados nas tabelas 5.1 e 5.2.

Tabela 5.1: Análise de convergência com norma L2

	$E_{12}$	$E_{23}$	$E_{34}$	$E_{45}$
$M$	0,2390	0,2628	0,0692	0,0115
$A$	0,6383	0,0803	0,0467	0,0055
$E$	2,6127	0,3379	0,2033	0,0724

Tabela 5.2: Análise de convergência com norma L1

	$E_{12}$	$E_{23}$	$E_{34}$	$E_{45}$
$M$	0,6839	0,3662	0,1277	0,0335
$A$	1,9143	0,2408	0,1402	0,0164
$E$	7,8378	1,0136	0,6099	0,2173

O esquema proposto com Crank-Nicolson é um método numérico de segunda ordem. Utilizamos os erros calculados para obter uma aproximação por mínimos quadrados do erro em função da distância entre as discretizações (vista na Figura 5.2). Apenas com estes pontos já é possível observar uma convergência próxima da quadrática em ambas as normas.

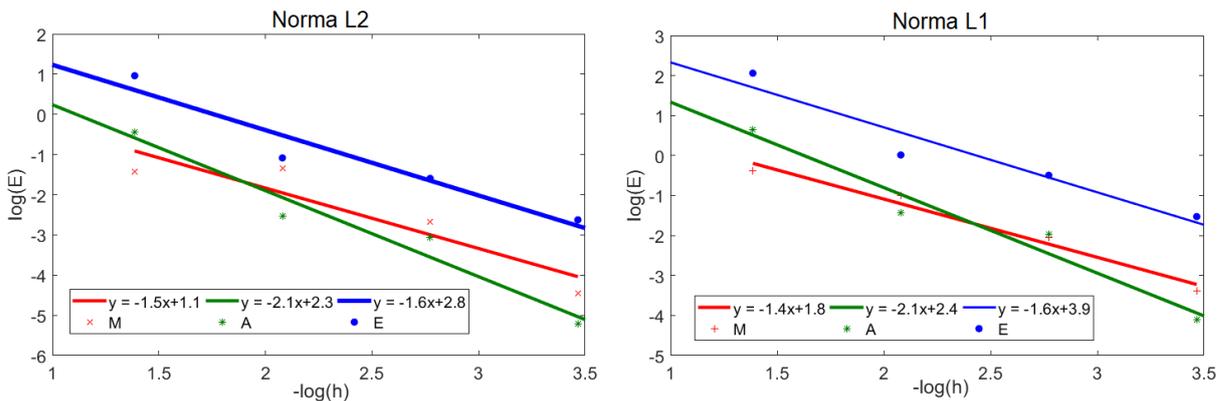


Figura 5.2: Gráficos de  $-\log(h) \times \log(E)$ , onde  $h$  é a diferença entre  $\Delta x$  de duas discretizações e  $E$  é o erro calculado entre as discretizações.

## 6 Resultados

Para simular o processo de dispersão, iniciamos os testes em um domínio homogêneo em relação aos valores de parâmetros descritos na Tabela 4.1. Simulamos um período de 7 dias em um mapa de 500m x 500m e 1600 pontos (onde cada ponto representa uma região de 12,5m) com uma distribuição inicial de mosquitos na fase alada vista na Figura 6.1(a) e as demais fases nulas.

Vale notar que uma região espacial com as dimensões descritas resulta em um sistema de 4800 variáveis (1600 pontos em cada fase) a ser resolvida por passo de tempo. Sistema este que, devido ao acoplamento das variáveis com seus vizinhos e a fase anterior, é representado por uma matriz esparsa (fato que pode ser utilizado para economizar memória na construção das estruturas).

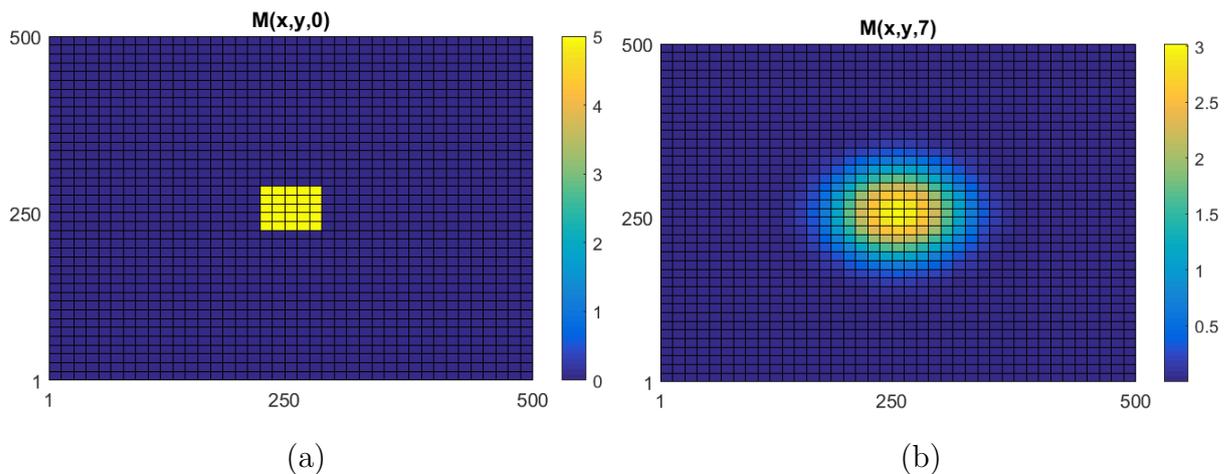


Figura 6.1: Estado inicial da fase alada em um domínio homogêneo (a) e resultados após 7 dias (b).

Os resultados obtidos na Figura 6.1(b) indicam a existência de mosquitos a 62,5m de distância da posição atual, indicando um alcance realista para o processo de dispersão.

Agora, simulamos um período de 365 dias. Devido à estabilidade provida pelo método semi-implícito, alcançamos bons resultados com um passo de tempo de 0,5, enquanto no método explícito seria necessário um passo de tempo inferior a 0,004 dias para a obtenção de resultados interessantes. Nota-se que, nesta simulação, fazemos uso de um mapa simulando um bairro (500m x 500m) da cidade de Juiz de Fora conforme visto em

Yamashita *et al.* (2018a). Para diferenciar regiões como parque, rua e casas, variamos espacialmente a capacidade de suporte da fase aquática. Tal variação pode ser vista da Figura 6.2.

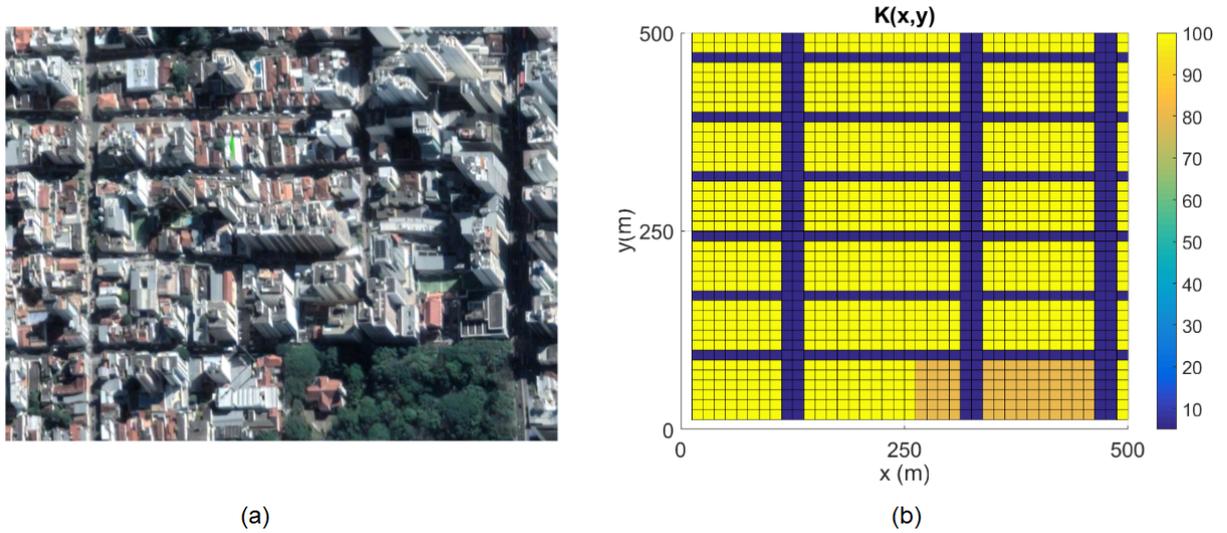


Figura 6.2: Mapa da região central da cidade de Juiz de Fora (a) e capacidade de suporte  $K$  variando no espaço (b).

Resultados foram encontrados a partir de uma condição inicial  $M_0 = A_0$  visto na Figura 6.3(a) e  $E_0 = 0$ . Encontramos após a simulação de 365 dias a situação apresentada na Figura 6.3(b).

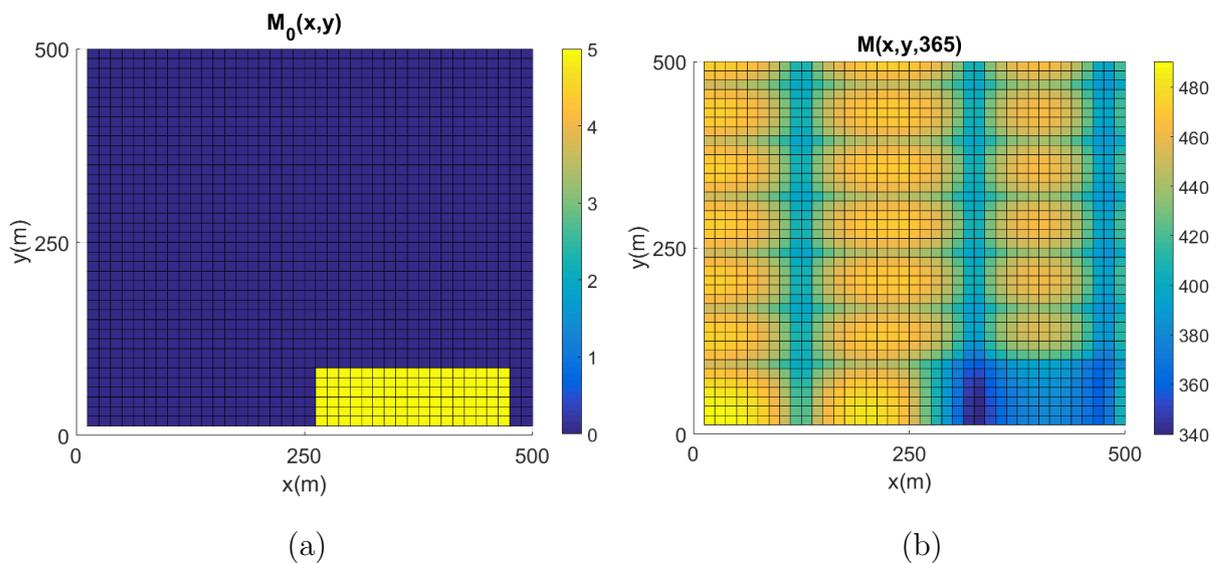


Figura 6.3: Estado inicial da fase alada em bairro de Juiz de Fora (a) e resultados após 365 dias (b).

Note que o resultado mostra como a capacidade de suporte da fase aquática conseguiu controlar o crescimento da fase alada em diferentes locais da cidade. Calculamos

ainda a população total por dia multiplicando a densidade em cada ponto por sua área e realizando um somatório. A Figura 6.4 indica que as três populações estabilizam após um tempo, mesmo que apenas a população aquática esteja sendo inicialmente limitada.

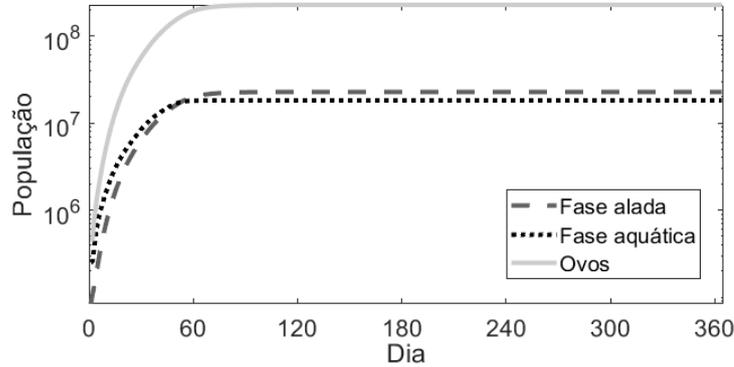


Figura 6.4: Evolução das populações no tempo.

Com o objetivo de realizar alguns testes com o uso de inseticida, simulamos o espalhamento de inseticida nas ruas da cidade com um fator de mortalidade 1 (buscando indicar uma proporcionalidade na mortalidade equivalente à 100% da população). Entretanto, vale notar que tal número não possui exatamente um embasamento experimental, podendo não representar completamente a ação do inseticida. De todo modo, consideramos uma situação hipotética onde, a partir do 60º dia do ano (quando, segundo a simulação, foi observado que a população atinge seu limite) ocorreria a liberação do inseticida de forma constante em todas as ruas da cidade, atingindo com uma proporção menor o interior de casas ( $h_1 = 0.3$ ) e parques ( $h_1 = 0.6$ ). Notamos na Figura 6.5 que com essa configuração a solução do sistema sofre uma transição para um novo equilíbrio com estas novas influências à mortalidade. Tal comportamento mostra como é possível modificarmos a implementação de modo a incluir variação temporal em parâmetros e obter como resultado uma solução ainda aparentemente contínua.

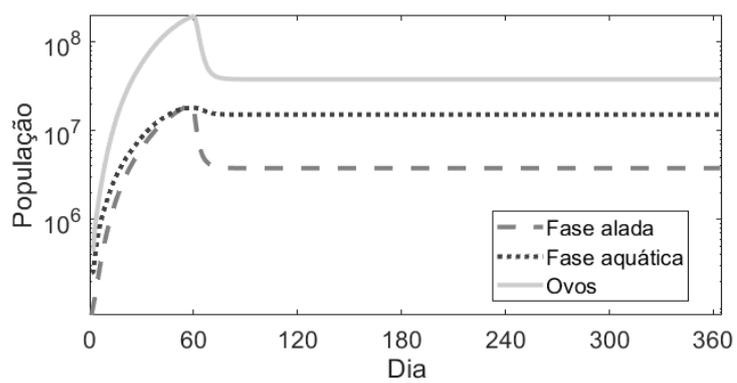


Figura 6.5: Evolução das populações no tempo com aplicação de inseticida.

## 7 Conclusões

Notamos que os resultados encontrados sem o uso de inseticidas representam um fenômeno de invasão biológica como descrito em Takahashi *et al.* (2005), que corresponde à proliferação dos mosquitos até um limite físico sem qualquer tipo de intervenção, seja ela antropogênica ou não. Apesar dos resultados numéricos aparentemente descreverem bem o modelo proposto, é questionável a validade dos resultados obtidos em relação à realidade.

Atualmente está sendo feita uma busca por dados para a realização de um ajuste nos parâmetros e validação do modelo, mas reconhecemos a dificuldade em obter tais informações uma vez que a medição da densidade populacional exata de qualquer fase de vida dos mosquitos é pouco praticada. Estuda-se a possibilidade de obter estimativas da distribuição espacial e temporal de ao menos uma das fases para trabalhos futuros.

De todo modo, percebemos que em um ecossistema urbano a população de mosquitos assume um comportamento periódico sem a interferência humana. Em períodos de frio, por exemplo, a tendência é a população de mosquitos se anular enquanto os ovos esperam por condições ideais de clima para eclodir e retomar o processo de crescimento populacional. Para atingir tal comportamento, uma modificação do sistema é necessária com a variação dos coeficientes da Tabela 4.1 ao longo do tempo. Tempo este que define variações de condições climáticas como temperatura e pluviosidade, que interferem em aspectos do comportamento biológico do mosquito, como visto em Yang *et al.* (2009).

Sendo assim, a continuidade deste trabalho se dará com o estudo da variação temporal de coeficientes como mortalidade, difusão e capacidade de suporte. Tomaremos a implementação do método aqui desenvolvido, que já se mostrou eficiente para a resolução do modelo com coeficientes contantes. Será então estudado como acoplar essas variações na implementação, e se é possível obter resultados matemáticos a respeito do novo modelo.

## Bibliografia

- Almeida, L., Haddon, A., Kermorvant, C., Léculier, A., Privat, Y., Strugarek, M., Vauchelet, N., e Zubelli, J. (2019). Optimal release of mosquitoes to control dengue transmission. working paper or preprint.
- Barreto, M. L. e Teixeira, M. G. (2008). Dengue in Brazil: epidemiological situation and contribution to a research agenda. *Estudos Avançados*, 22(64):53–72.
- Bhatt, S., Gething, P. W., Brady, O. J., Messina, J. P., Farlow, A. W., Moyes, C. L., Drake, J. M., Brownstein, J. S., Hoen, A. G., Sankoh, O., et al. (2013). The global distribution and burden of dengue. *Nature*, 496(7446):504.
- Broyden, C. G. (1965). A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of computation*, 19(92):577–593.
- Christophers, S. R. (1960). *Aedes aegypti: The yellow fever mosquito*. CUP Archive.
- Cummins, B., Cortez, R., Foppa, I. M., Walbeck, J., e Hyman, J. M. (2012). A spatial model of mosquito host-seeking behavior. *PLoS computational biology*, 8(5):e1002500.
- Dufourd, C. e Dumont, Y. (2013). Impact of environmental factors on mosquito dispersal in the prospect of sterile insect technique control. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(9):1695–1715.
- Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations: Second Edition (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society.
- Ferguson, N. M. (2018). Challenges and opportunities in controlling mosquito-borne infections. *Nature*, 559(7715):490.
- Krebs, C. J. (1978). *Ecology: The experimental analysis of distribution and abundance*. Harper & Row.
- LeVeque, R. J. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Springer Science & Business Media.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- Lima, E. L. (2002). Análise no  $\mathbb{R}^n$ . *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro*.
- Secretaria de Vigilância em Saúde (2019). Monitoramento dos casos de arboviroses urbanas transmitidas pelo aedes (dengue, chikungunya e zika) até a semana epidemiológica 17 de 2019.
- Takahashi, L. T., Maidana, N. A., Ferreira, W. C., Pulino, P., e Yang, H. M. (2005). Mathematical models for the aedes aegypti dispersal dynamics: travelling waves by wing and wind. *Bulletin of mathematical Biology*, 67(3):509–528.

- Teixeira, M. G. (2008). Controle do dengue: importância da articulação de conhecimentos transdisciplinares. *Interface-Comunicação, Saúde, Educação*, 12:442–444.
- Thomé, R. C., Yang, H. M., e Esteva, L. (2010). Optimal control of aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide. *Mathematical Biosciences*, 223(1):12–23.
- Versteeg, H. K. e Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson education.
- Walker, T., Johnson, P., Moreira, L., Iturbe-Ormaetxe, I., Frentiu, F., McMeniman, C., Leong, Y., Dong, Y., Axford, J., Kriesner, P., et al. (2011). The wmel wolbachia strain blocks dengue and invades caged aedes aegypti populations. *Nature*, 476(7361):450.
- Yamashita, W. M., Das, S. S., e Chapiro, G. (2018a). Numerical modeling of mosquito population dynamics of aedes aegypti. *Parasites & vectors*, 11(1):245.
- Yamashita, W. M., Takahashi, L. T., e Chapiro, G. (2018b). Traveling wave solutions for the dispersive models describing population dynamics of aedes aegypti. *Mathematics and Computers in Simulation*, 146:90–99.
- Yang, H., Macoris, M., Galvani, K., Andrighetti, M., e Wanderley, D. (2009). Assessing the effects of temperature on the population of aedes aegypti, the vector of dengue. *Epidemiology & Infection*, 137(8):1188–1202.